

# **SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE VIGA COM ELEMENTO CORROTACIONAL 2D BASEADO NA TEORIA DE TIMOSHENKO**

*Luiz Antonio Farani de Souza*

Docente do Curso de Engenharia Civil, Campus Apucarana, UTFPR. lasouza@utfpr.edu.br

## **RESUMO**

Para uma análise não linear é essencial ter um elemento que seja capaz de modelar com precisão o comportamento não linear da estrutura. O desenvolvimento de elementos não lineares de viga é um tópico importante no campo da mecânica estrutural. Com relação à não linearidade geométrica, a geometria deformada da viga pode ser bem diferente da indeformada. Duas teorias são amplamente utilizadas para estudar as deflexões de viga. Na teoria de viga de Euler-Bernoulli, o efeito de cisalhamento é desprezado, enquanto que na teoria da viga de Timoshenko esse efeito é considerado. Para a função tradicional de interpolação de deslocamento, o elemento de viga produz travamento por membrana sob grandes deslocamentos e travamento por cisalhamento quando o elemento se torna esbelto. Nesse artigo, um elemento finito de viga de Timoshenko para análise em grandes deslocamentos de vigas planas é implementado no contexto da formulação Corrotacional. Um elemento de ligação de espessura zero é inserido no apoio, cuja matriz de rigidez é escrita em função das rigidezes axial, translacional e rotacional. A solução aproximada do sistema de equações não lineares é obtida por meio de um procedimento incremental e iterativo com ordem de convergência cúbica, associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. Um código computacional é desenvolvido com o programa livre Scilab. Os resultados numéricos mostram que as trajetórias de equilíbrio podem diferir com a consideração na análise das teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, visto que estão atreladas ao índice de esbeltez do sistema estrutural.

**PALAVRAS-CHAVE:** Elemento de ligação; Comprimento de Arco; não linearidade geométrica; formulação Corrotacional; Elementos Finitos.

## **1 INTRODUÇÃO**

Os projetos de estruturas são desenvolvidos geralmente considerando a análise elástica linear. As equações de equilíbrio são formuladas baseando-se na configuração inicial indeformada da estrutura e assume-se que as deformações, os deslocamentos e as rotações são pequenos. Uma desvantagem da análise elástica linear é a sua incapacidade de retratar o comportamento real de estruturas sob condições não usuais de carregamento ou de carregamento limite. Entretanto, as estruturas podem apresentar comportamento não linear relevante antes mesmo de atingirem seus limites de resistência (SILVA et al., 2016).

A análise não linear de estruturas vem se tornando a cada dia mais importante para o estudo real de problemas encontrados na engenharia. Devido à evolução dos materiais, constroem-se estruturas cada vez mais esbeltas, capazes de se deslocarem no espaço sem necessariamente perderem suas propriedades materiais e, a partir disso, torna-se imprescindível um melhor entendimento do comportamento da não linearidade geométrica de estruturas (OLIVEIRA; SILVA, 2017).

Duas teorias são amplamente utilizadas para estudar as deflexões de viga. A teoria de viga de Euler-Bernoulli descreve a cinemática da viga em termos somente da deformação de flexão. Ao desprezar a contribuição da deformação de cisalhamento, essa teoria requer que as seções planas permaneçam planas e perpendiculares ao eixo neutro após a deformação. Consequentemente, a teoria de Euler-Bernoulli é mais adequada para vigas finas ou delgadas, porque as deformações de cisalhamento têm uma influência considerável na deformação de vigas espessas. Uma representação mais precisa da flexão de vigas espessas, a qual permite a inclusão de deformações de cisalhamento, é a teoria de viga de Timoshenko (EDEM, 2006).

Há pesquisas recentes que tratam acerca da análise de estruturas com a teoria de viga de Timoshenko. Gan, Huang e Kien (2017) realizaram análises de pós-flambagem de vigas e pórticos planos com elementos de viga baseados na teoria de viga de Timoshenko no contexto da formulação Corrotacional. Wong; Sulistio e Syamsoeyadi (2018) fizeram um aprimoramento do Método dos Elementos Finitos com funções de interpolação de Kriging para as análises estática e dinâmica de flambagem com vigas de Timoshenko. Tang, Zhou e Chang (2019) propuseram um elemento de viga-coluna o qual permite o efeito P- $\delta$  local e a deformação por cisalhamento para análise de segunda ordem. Tang et al. (2021) apresentaram uma formulação Corrotacional consistente para elementos bidimensionais de viga-coluna de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Verificaram que os momentos nodais equivalentes são afetados pela mudança geométrica do elemento e, conseqüentemente, contribuem na matriz de rigidez geométrica. Souza et al. (2021) apresentaram um modelo numérico-computacional para pórticos com comportamento geométrico não linear, considerando a formulação Corrotacional de Elementos Finitos e as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko.

No contexto do Método dos Elemento Finitos, um elemento de viga de Timoshenko não linear pode ser formulado pela interpolação linear dos deslocamentos axiais e transversais e da rotação. Porém, algumas técnicas, como a integração de ordem reduzida, são necessárias para eliminar o fenômeno de travamento por cisalhamento. Como uma alternativa para prevenir um elemento de viga de Timoshenko do problema de travamento por cisalhamento é empregar funções de interpolação apropriadas para as variáveis (KIEN, 2012).

Nesse cenário, este artigo tem por objetivo apresentar um modelo numérico-computacional para a análise estática de vigas com comportamento não linear geométrico, considerando o elemento fundamentado na teoria de viga de Timoshenko proposto por Kien (2012). Baseado na expressão do arco abatido para a deformação local, esse elemento é formulado usando polinômios exatos para interpolar o deslocamento transversal e a rotação. As equações da matriz de rigidez e do vetor de forças internas são apresentadas. O material da viga é considerado isotrópico e elástico, e a seção transversal da mesma é uniforme.

Para a discretização da estrutura, considera-se a formulação Corrotacional do Método dos Elementos Finitos. A formulação Corrotacional separa o movimento de corpo rígido da deformação pura que é sempre pequena em relação ao elemento corrotacional de viga (ELKARANSHAWY; ELERIAN; HUSSIN, 2018). Um elemento de ligação de espessura zero é inserido no apoio, cuja matriz de rigidez é escrita em função das rigidezes axial, translacional e rotacional.

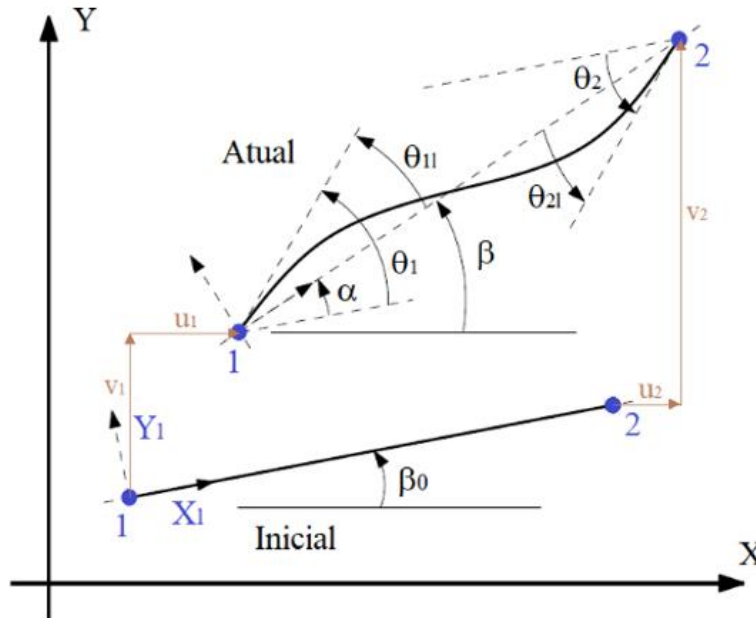
A solução aproximada do sistema de equações não lineares é obtida por meio do procedimento incremental e iterativo proposto por Souza et al. (2017), o qual consiste de uma adaptação do método de Potra-Pták (1984) ao problema estrutural, associando-o à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear (RIKS, 1972; RIKS, 1979).

Um código computacional é desenvolvido com o programa livre Scilab, versão 6.1.0 (SCILAB, 2020) para as simulações numéricas. Os resultados de uma viga em balanço encontrada na literatura mostram que as trajetórias de equilíbrio podem diferir com a consideração na análise das teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, visto que estão atreladas ao índice de esbeltez do sistema estrutural.

## **2 MATERIAIS E MÉTODOS**

### **2.1 ELEMENTO CORROTACIONAL DE VIGA 2D BASEADO NA TEORIA DE TIMOSHENKO**

O elemento finito de viga-coluna tem dois nós e três graus de liberdade/nó. Assume-se que não há deformação de cisalhamento na viga e, então, a seção transversal permanece plana e normal ao eixo da mesma. Considere o elemento de viga-coluna em suas configurações inicial e atual, conforme o desenho esquemático no Gráfico 1.



**Gráfico 1:** Configurações inicial e atual, devido às deformações de flexão, do elemento de viga-coluna.  
**Fonte:** adaptada de Yaw (2009).

Na configuração inicial, as coordenadas dos nós “1” e “2” do elemento no sistema global são  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$ , respectivamente. O comprimento original (indeformado)  $L_0$  da viga é dado pela seguinte equação (YAW, 2009):

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}. \quad (1)$$

Para o elemento de viga na sua configuração atual, as coordenadas nodais globais são  $(X_1 + u_1, Y_1 + v_1)$  para o nó “1” e  $(X_2 + u_2, Y_2 + v_2)$  para o nó “2”, em que  $u_i$  é o deslocamento do nó  $i$  na direção  $X$  e  $v_i$  é o deslocamento do nó  $i$  na direção  $Y$ , com  $i = 1, 2$ . O comprimento atual (deformado)  $L$  é (YAW, 2009):

$$L = \sqrt{(X_2 + u_2 - X_1 - u_1)^2 + (Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1)^2}. \quad (2)$$

O vetor de deslocamentos globais  $\mathbf{p}$  do elemento finito  $m$  é dado por:

$$\mathbf{p}_m = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T. \quad (3)$$

O deslocamento axial local ( $u_1$ ) do elemento é calculado por:

$$u_1 = L - L_0. \quad (4)$$

As rotações nodais locais ( $\theta_{11}$  e  $\theta_{21}$ ) são computadas por, respectivamente:

$$\theta_{11} = \arctan \left( \frac{\cos\beta \sin\beta_1 - \sin\beta \cos\beta_1}{\cos\beta \cos\beta_1 + \sin\beta \sin\beta_1} \right), \quad (5)$$

$$\theta_{21} = \arctan\left(\frac{\cos\beta \sin\beta_2 - \sin\beta \cos\beta_2}{\cos\beta \cos\beta_2 + \sin\beta \sin\beta_2}\right), \quad (6)$$

sendo  $\beta_1 = \theta_1 + \beta_0$  e  $\beta_2 = \theta_2 + \beta_0$ . Os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são as rotações nodais globais calculadas do sistema de equações globais, e as expressões para o ângulo inicial  $\beta_0$  e o para o ângulo corrente  $\beta$  da barra são, respectivamente:

$$\beta_0 = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right), \quad (7)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}\right). \quad (8)$$

A matriz de rigidez tangente elementar  $\mathbf{K}_{el}$  é determinada em função da parcela da matriz de rigidez dependente do material  $\mathbf{K}_M$  e da matriz de rigidez geométrica ou das tensões iniciais  $\mathbf{K}_G$ , dada pela seguinte expressão (CRISFIELD, 1991; YAW, 2009):

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G, \quad (9)$$

na qual

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}, \quad (10)$$

$$\mathbf{K}_G = \frac{N}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T). \quad (11)$$

sendo  $\mathbf{D}$  a matriz constitutiva, os vetores  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{r}$ , respectivamente:

$$\mathbf{z} = [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]^T, \quad (12)$$

$$\mathbf{r} = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T, \quad (13)$$

e a matriz  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/L & c/L & 1 & s/L & -c/L & 0 \\ -s/L & c/L & 0 & s/L & -c/L & 1 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

As expressões para calcular os valores do seno e do cosseno do ângulo  $\beta$ , denotados por  $s$  e  $c$  na Equação (14) são dadas por, respectivamente:

$$\cos(\beta) = \frac{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}{L}, \quad (15)$$

$$\sin(\beta) = \frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{L}. \quad (16)$$

O vetor de forças internas elementar  $\mathbf{F}_{el}$  é determinado por:

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{B}^T [N \quad \bar{M}_1 \quad \bar{M}_2]^T. \quad (17)$$

Kien (2012) desenvolveu um elemento de viga de Timoshenko para análise de grandes deslocamentos de vigas e pórticos planos formulados no contexto do método Corrotacional. A expressão para um arco abatido é adotada para a deformação local. A deformação efetiva  $\varepsilon_{eff}$  é escrita em termos dos deslocamentos nodais por:

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \frac{u_1}{L_0} + \frac{1}{(1 + \varphi)^2} \left[ \frac{\varphi(2 + \varphi)}{24} (\theta_{11} - \theta_{21})^2 + \frac{1}{30} (2\theta_{11}^2 - \theta_{11}\theta_{21} + \theta_{21}^2) \right], \quad (18)$$

na qual  $\varphi$  é dado por:

$$\varphi = \frac{12 EI}{L_0^2 \mu GA}. \quad (19)$$

Os esforços internos ( $N$ ,  $\bar{M}_1$  e  $\bar{M}_2$ ) do vetor de força interna  $\mathbf{F}_{ei}$  são calculados como segue (KIEN; HUONG; HA, 2013):

$$N = EA\varepsilon_{\text{eff}}, \quad (20)$$

$$\bar{M}_1 = \frac{L_0 EA}{(1 + \varphi)^2} \left[ \frac{\varphi(2 + \varphi)}{12} (\theta_{11} - \theta_{21}) + \frac{1}{30} (4\theta_{11} - \theta_{21}) \right] \varepsilon_{\text{eff}} + \frac{EI}{L_0(1 + \varphi)^2} [\varphi(2 + \varphi)(\theta_{11} - \theta_{21}) + 2(2\theta_{11} + \theta_{21})] + \frac{\varphi^2 L_0 \mu GA}{4(1 + \varphi)^2} (\theta_{11} + \theta_{21}), \quad (21)$$

$$\bar{M}_2 = \frac{L_0 EA}{(1 + \varphi)^2} \left[ \frac{\varphi(2 + \varphi)}{12} (\theta_{21} - \theta_{11}) + \frac{1}{30} (4\theta_{21} - \theta_{11}) \right] \varepsilon_{\text{eff}} + \frac{EI}{L_0(1 + \varphi)^2} [\varphi(2 + \varphi)(\theta_{21} - \theta_{11}) + 2(\theta_{11} + 2\theta_{21})] + \frac{\varphi^2 L_0 \mu GA}{4(1 + \varphi)^2} (\theta_{11} + \theta_{21}), \quad (22)$$

na qual  $A$  é a área da seção transversal,  $I$  é o momento de inércia da seção transversal,  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $G$  é o módulo transversal de cisalhamento e  $\square$  é o coeficiente de correção de cisalhamento. Para o cálculo da matriz de rigidez dependente do material  $\mathbf{K}_M$  na Equação (10), utiliza-se a matriz constitutiva  $\mathbf{D}$  dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{EI}{L_0(1 + \varphi)^2} \mathbf{C}_1 + \frac{\varphi^2 L_0 \mu GA}{4(1 + \varphi)^2} \mathbf{C}_2 + EAL_0 \mathbf{C}_3, \quad (23)$$

na qual

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi^2 + 2\varphi + 4 & -(\varphi^2 + 2\varphi - 2) \\ 0 & -(\varphi^2 + 2\varphi - 2) & \varphi^2 + 2\varphi + 4 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_0^2} & \frac{t_1}{L_0} & \frac{t_2}{L_0} \\ t_1^2 + \frac{5\varphi^2 + 10\varphi + 8}{60(1 + \varphi)^2} \varepsilon_{\text{eff}} & t_1 t_2 - \frac{5\varphi^2 + 10\varphi + 2}{60(1 + \varphi)^2} \varepsilon_{\text{eff}} & \\ \text{sim.} & t_2^2 + \frac{5\varphi^2 + 10\varphi + 8}{60(1 + \varphi)^2} \varepsilon_{\text{eff}} & \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$t_1 = \frac{1}{60(1 + \varphi)^2} [5\varphi(2 + \varphi)(\theta_{11} - \theta_{21}) + 2(4\theta_{11} - \theta_{21})], \quad (27)$$

$$t_2 = \frac{1}{60(1 + \varphi)^2} [5\varphi(2 + \varphi)(\theta_{21} - \theta_{11}) + 2(4\theta_{21} - \theta_{11})]. \quad (28)$$

De acordo com Kien, Huong e Ha (2013), fazendo  $\emptyset \rightarrow 0$  no modelo de viga baseado na teoria de Timoshenko, recai-se no modelo de viga de Euler-Bernoulli. Assim, o elemento implementado é capaz de modelar vigas esbeltas.

## 2.2 ELEMENTO DE LIGAÇÃO DE ESPESSURA ZERO

A conexão é simulada pelo elemento de ligação proposto por Del Savio, Andrade e Martha (2005). A matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{lig}$  desse elemento pode ser expressa matematicamente por:

$$\mathbf{K}_{lig} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & -\mathbf{S} \\ -\mathbf{S} & \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad (29)$$

com

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_A & 0 & 0 \\ 0 & S_T & 0 \\ 0 & 0 & S_R \end{bmatrix}. \quad (30)$$

em que  $S_A$ ,  $S_T$  e  $S_R$  são as rigidezes axial, translacional e rotacional, respectivamente. Nas análises não lineares geométricas, quando se adota o modelo linear de ligação, a matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{lig}$  é mantida invariável no processo iterativo e incremental ( $S_A$ ,  $S_T$  e  $S_R$  ficam constantes).

Segundo Chen, Goto e Liew (1996), os esforços axial, de cisalhamento, de flexão e de torção são transmitidos à conexão. Para os exemplos numéricos estudados neste trabalho, contudo, os efeitos das rigidezes axial e translacional são desprezados e valores numéricos grandes são adotados para essas rigidezes, ou seja,  $S_A \cong \infty$  e  $S_T \cong \infty$ , respectivamente. Considera-se somente o efeito provocado pelo momento fletor, variando-se a rigidez rotacional  $S_R$ . No caso de a ligação ser idealmente flexível considera-se  $S_R = 0$  e para ligação totalmente rígida,  $S_R \cong \infty$ .

## 2.3 PROBLEMA ESTRUTURAL

Metodologias eficientes de solução de sistemas não lineares devem ser capazes de percorrer todo o caminho de equilíbrio do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares ou críticos (ponto limite de carga, ponto limite de deslocamento e ponto de bifurcação) que possam existir (PINHEIRO; SILVEIRA, 2004; SOUZA et al., 2017).

A equação que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural com comportamento não linear geométrico é descrita por (MAXIMIANO; SILVA; SILVEIRA, 2014):

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int} = \mathbf{0}, \quad (31)$$

na qual  $\mathbf{g}$  é o vetor de forças desequilibradas,  $\mathbf{F}_r$  é o vetor de referência que caracteriza a direção da força externa,  $\lambda$  é o parâmetro de força e  $\mathbf{F}_{int}$  é o vetor de forças internas.

A solução do problema estrutural dado pela Equação (31) é obtida por meio de um esquema iterativo e incremental. Para uma sequência do parâmetro de carga  $\lambda$ , uma sequência do respectivo incremento de deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$  é calculado. Como  $\mathbf{g}$  é um

sistema não linear dos deslocamentos, iterações para correção do parâmetro de carga são necessárias para obter a solução.

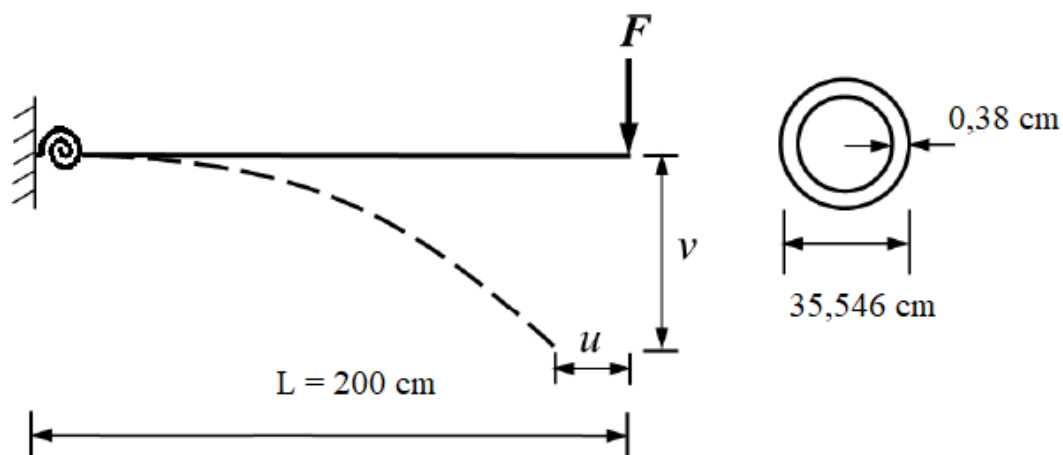
A solução aproximada do sistema de equações não lineares é obtida por meio do procedimento incremental e iterativo proposto por Souza et al. (2017), o qual consiste de uma adaptação do método de Potra-Pták (1984) ao problema estrutural, associando-o à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear (RIKS, 1972; RIKS, 1979). Nessa técnica, ao invés de se utilizarem restrições geométricas e de energia, procura-se eliminar diretamente os deslocamentos residuais (ou deslocamentos iterativos) devido às forças desequilibradas. O procedimento fornece a norma mínima dos deslocamentos residuais a cada iteração no passo de carga. O algoritmo do método de solução pode ser encontrado em Souza et al. (2021).

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Seja a viga em balanço sujeita a uma força concentrada  $F$  em sua extremidade livre, conforme o desenho esquemático no Gráfico 2. Para simular o engaste, considera-se a rigidez rotacional da mola  $S_R = 1,0 \times 10^{10}$  kN m/rad. A análise de grande deflexão é realizada com o elemento corrotacional de viga considerando as formulações de Timoshenko e de Euler-Bernoulli ( $\phi = 0$ ). Para a correção de cisalhamento, utiliza-se o coeficiente  $\mu$  igual a 0,5. O material que constitui a viga tem módulo de elasticidade  $E = 2,0 \times 10^4$  kN/cm<sup>2</sup> e módulo transversal de cisalhamento  $G = E/2$ . O peso próprio da estrutura é desprezado na análise. Para o fim das simulações, foi estabelecida uma condição envolvendo o deslocamento máximo na extremidade livre da viga.

As trajetórias de equilíbrio obtidas com as teorias de viga são apresentadas no Gráfico 3, havendo boa concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por Tang, Zhou e Chan (2015). A malha de Elementos Finitos considerada consiste de um elemento de ligação localizado no apoio e 40 elementos de viga.

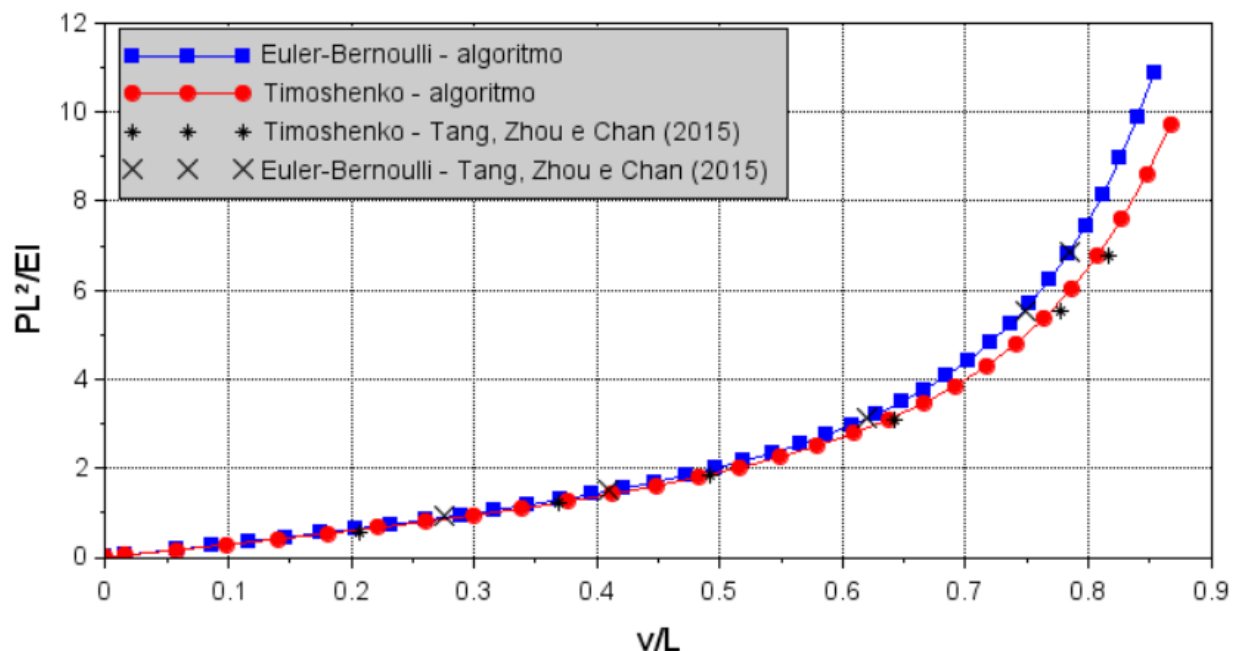
No procedimento incremental de Potra-Pták para a resolução do sistema de equações não lineares são considerados os seguintes parâmetros: comprimento inicial de arco  $^0\theta = 10$ ; número máximo de iterações em cada passo de carga  $k_{\text{máx}} = 50$ ; número de iterações desejadas em cada passo de carga  $k_d = 7$ ; tolerância  $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-4}$ ; e incremento de carga  $\Delta P = 100$  kN.



**Gráfico 2:** Modelo estrutural da viga em balanço  
**Fonte:** Adaptada de Tang, Zhou e Chan (2015)

Na formulação proposta por Kien (2012), utiliza-se uma expressão de arco abatido (uma forma degenerada da deformação de Green) para a deformação local. Esse elemento evita o fenômeno de travamento por cisalhamento.

Em geral, de acordo com sua altura, as vigas podem ser classificadas em duas categorias: fina e espessa. Em vigas finas, a relação entre o comprimento e a altura da seção (índice de esbeltez) é grande. Consequentemente, o efeito do cisalhamento é pequeno nesse caso. Inversamente, a análise do efeito de cisalhamento é muito significativa em vigas espessas, que têm pequeno índice de esbeltez.



**Gráfico 3:** Trajetórias de equilíbrio  
**Fonte:** O próprio autor

A teoria de viga de Timoshenko, de acordo com Oñate (2013), é aplicável a barras com índices de esbeltez  $L_0/h$  menor que 10, sendo  $L_0$  o comprimento inicial da barra e  $h$  a altura da seção transversal. Nesse sentido, à medida que altura  $h$  da seção aumenta o efeito do cisalhamento torna-se mais relevante.

A viga analisada tem índice de esbeltez cerca de 5,626 ( $\square 200/35,546$ ), e o efeito da deformação de cisalhamento na resposta da mesma fica evidente quando se têm grandes deslocamentos. Nota-se que, para os incrementos iniciais de carga (quando as deformações na estrutura são pequenas), as repostas preditas pelos modelos de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko ficam bastante próximas.

No que diz respeito à formulação Corrotacional do Método dos Elementos Finitos, a separação do movimento do elemento de viga em movimentos de corpo rígido e deformacional permite a decomposição da matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{el}$  em duas parcelas (ver a Equação (9)) - a material e a geométrica. Isso possibilita, de maneira simples, a inclusão dos efeitos da não linearidade geométrica na análise.

#### 4 CONCLUSÃO

Neste artigo, avaliou-se a eficiência de um modelo de viga fundamentado na teoria de viga de Timoshenko, no contexto da formulação Corrotacional do Método dos Elementos Finitos, por meio da análise estática de uma viga em balanço com comportamento não linear geométrico. Os resultados numéricos mostraram a boa resposta da formulação desenvolvida por Kien (2012), quanto à obtenção das trajetórias de equilíbrio.



É importante nas análises estruturais, em que se considera o efeito da deformação por cisalhamento, utilizar um modelo de viga cuja formulação evite o fenômeno de travamento por cisalhamento.

Por fim, este estudo mostrou que as trajetórias de equilíbrio podem diferir quando se considera o efeito do cisalhamento. Essa discrepância fica evidente quando se tem grandes deslocamentos na viga. No entanto, quando os deslocamentos são pequenos (nos estágios iniciais de carregamento), as teorias de viga predizem respostas bastante próximas.

## REFERÊNCIAS

CHEN, W. F.; GOTO, Y.; LIEW, J. R. **Stability design of semi-rigid frames**. New York, USA: John Wiley & Sons, 1996.

CRISFIELD M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Vol 1. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltda, 1991.

DEL SAVIO, A. A.; ANDRADE, S. A. L.; MARTHA, L. F.; SILVA VELLASCO, P. C. G. Um sistema não-linear para análise de pórticos planos semi-rígidos. **Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural, Passo Fundo**, v. 2, n. 1, p. 97-125, 2005.

EDEM, I. B. The exact two-node Timoshenko beam finite element using analytical bending and shear rotation interdependent shape functions. **International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics**, v. 7, n. 6, p. 425-431, 2006.

ELKARANSHAWY, H. A.; ELERIAN, A. A.; HUSSIEN, W. I. A corotational formulation based on Hamilton's principle for geometrically nonlinear thin and thick planar beams and frames. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2018, 2018.

GAN, B. S.; HUONG, T. T.; KIEN, N. D. Post-buckling behaviour of axially FGM planar beams and frames. **Procedia engineering**, v. 171, p. 147-158, 2017.

KIEN, N. D. A Timoshenko beam element for large displacement analysis of planar beams and frames. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 12, n. 06, p. 1250048, 2012.

KIEN, N. D.; HUONG, T. T.; LE, T. H. A co-rotational beam element for geometrically nonlinear analysis of plane frames. **Vietnam Journal of Mechanics**, v. 35, n. 1, p. 51-65, 2013.

OÑATE, E. **Structural analysis with the finite element method. Linear statics: volume 2: beams, plates and shells**. Springer Science & Business Media, 2013.

PINHEIRO, L.; SILVEIRA, R. A. M. Análise da estabilidade elástica de treliças espaciais. **Rem: Revista Escola de Minas**, v. 57, n. 2, p. 85-92, 2004.

POTRA, F. A.; PTÁK, V. **Nondiscrete induction and iterative processes**. Vol. 103. Boston, MA: Pitman Advanced Publishing Program, 1984.

MAXIMIANO, D. P.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M. Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. **Rem: Revista Escola de Minas**, v. 67, n. 2, p. 143-150, 2014.

OLIVEIRA, G. C.; SILVA, W. T. M. Análise não linear de arcos utilizando o elemento de viga unificado Bernoulli-Timoshenko e a formulação co-rotacional. **REEC - Revista Eletrônica de Engenharia Civil**, v. 13, n. 2, 2017.

RIKS, E. The application of Newton's methods to the problems elastic stability. **Journal of Applied Mechanics**, v. 39, n. 4, p. 1060-1065, 1972.

RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 15, n. 7, p. 529-551, 1979.

SCILAB, versão 6.1.0. France: **ESI Group**, 2020.

SILVA, J. L.; LEMES, I.; SILVEIRA, R.; SILVA, A. Influência da teoria de viga na análise geometricamente não linear de estruturas reticuladas. *In*: PROCEEDINGS OF THE XXXVII IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 2016, Brasília. **Anais** [...]. Brasília: XXXVII CILAMCE, 2016.

SOUZA, L. A. F.; CASTELANI, E. V.; SHIRABAYASHI, W. V. I.; MACHADO, R. D. Métodos iterativos de terceira e quarta ordem associados à técnica de comprimento de arco linear. **Ciência & Engenharia**, v. 26, n. 1, p. 39-49, 2017.

SOUZA, L. A. F.; VANALLI, L.; VANDERLEI, R. D.; TOLENTINO, L. D. Nonlinear numerical model of plane frames considering semi-rigid connection and different beam theories. **Revista Matéria**, v. 26, n. 3, 2021.

TANG, Y. Q.; CHEN, W. F.; LIU, Y. P.; CHAN, S. L. Consistent co-rotational framework for Euler-Bernoulli and Timoshenko beam-column elements under distributed member loads. **Advances in Structural Engineering**, p. 1369433220986632, 2021.

TANG, Y. Q.; ZHOU, Z. H.; CHAN, S. L. Nonlinear beam-column element under consistent deformation. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 15, n. 05, p. 1450068, 2015.

WONG, F. T.; SULISTIO, A.; SYAMSOEYADI, H. Kriging-based Timoshenko beam elements with the discrete shear gap technique. **International Journal of Computational Methods**, v. 15, n. 07, p. 1850064, 2018.

YAW, L. L. **2D Co-rotational Truss Formulation**. Walla Walla University, 2009.