



ANÁLISE DOS MODOS NORMAIS DE VIBRAÇÃO EM VIGAS BI-ENGASTADAS

Adriano Mohr Bonatto¹; Jonathan Alexandre Estrela¹; Ronaldo Pilar¹; Emerson Mario Boldo²

RESUMO: Vigas são estruturas que durante sua vida útil estão sujeitas as mais variadas formas de carregamentos estáticos e dinâmicos. Em condições específicas, cargas dinâmicas aplicadas em vigas podem gerar uma dinâmica estrutural não-linear ao longo da mesma comprometendo sua integridade. Portanto é fundamental entender o comportamento dessas estruturas quando submetidas a esse tipo de esforço. Este trabalho visa o estudo teórico dos modos normais de vibração de vigas bi-engastadas, inicialmente caracterizadas por uma vibração livre e não amortecida. A teoria foi desenvolvida com o auxílio da formulação Lagrangiana da Mecânica Clássica e coordenadas generalizadas, considerando-se um modelo discreto com dois graus de liberdade. Verificou-se que as frequências naturais de oscilação encontradas, são características exclusivas da estrutura e independentes de um eventual carregamento externo aplicado, possibilitando o desacoplamento das equações integrantes do sistema dinâmico. Após a formulação do modelo teórico, com o auxílio da modelagem computacional, foi construída uma simulação para auxiliar na transmissão de conhecimento desse tipo de fenômeno aos alunos de engenharia.

PALAVRAS-CHAVE: Frequência natural de oscilação; Mecânica Lagrangiana; Modulus; Vigas.

INTRODUÇÃO

Os elementos do tipo viga são muito importantes em vários sistemas estruturais. Eles geralmente são encontrados em algum ponto da extensão de diversas estruturas, sejam elas simples ou complexas. Uma grande quantidade de estruturas podem ser formadas a partir de elementos tipo viga como, por exemplo, as treliças.

Uma viga pode ser definida como um elemento estrutural que possui o comprimento muito maior que a altura e a largura, e estão principalmente submetidas a cargas laterais, resultando na flexão de sua dimensão maior (NAYFEH; PAI, 2004). Uma viga genérica, portanto, é uma barra prismática, reta e longa, que deve suportar tração, compressão, flexão, cisalhamento transversal e torção. Segundo BEER (1994), as vigas podem ser classificadas de acordo com o modo pelo qual estão vinculadas existindo tipos como: simplesmente apoiada, em balanço ou viga bi-engastada. Cada um desses tipos oferece diferentes valores de contorno quando da resolução de problemas onde esforços dinâmicos estão atuando sobre as vigas. Carregamentos dinâmicos podem ser originados de eventos naturais ou não, tais como: os ventos, terremotos, carros e caminhões atravessando uma ponte ou até mesmo uma torcida organizada pulando em sincronia num estádio de futebol (GENOVESE et al., 2001). Como consequência disso, atualmente

¹ Discentes do Curso de Engenharia Civil. Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - UNIOESTE - Cascavel - PR. Integrantes do Programa de Iniciação Científica Voluntário - PICV/UNIOESTE/PRPPG. adrianombonato@yahoo.com.br; jonathan_estrela@hotmail.com; ronaldorilar@hotmail.com

² Docente da UNIOESTE. Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - UNIOESTE - Cascavel - PR. emb@unioeste.br

as estruturas operam sob condições muito severas durante sua vida útil requerendo estruturas mais flexíveis que trabalhem sob ação de esforços dinâmicos. O aumento da flexibilidade permite uma dinâmica estrutural desejada para a viga, porém em alguns casos, essa mesma flexibilidade sujeita a diferentes formas de excitação favorece o aparecimento de comportamentos não-lineares que produzem um cenário dinâmico complexo (GOMES DA SILVA, 2006). Durante as fases de desenvolvimento é vital que o comportamento dinâmico de uma nova estrutura seja conhecido. O desconhecimento dos níveis e características da resposta dinâmica pode levar a níveis de tensões no material não previstas a priori e a subsequente falha de sua integridade. Também pode levar à falha estrutural a aplicação de carregamentos repetitivos, os quais estão diretamente envolvidos em fadiga, propagação de trincas e acumulação de danos estruturais. Fenômenos que apresentam comportamento dinâmico não linear, como as vibrações ressonantes, portanto, são altamente perigosos principalmente se não forem previstos ou conhecidos pela teoria.

O objetivo deste trabalho foi realizar a modelagem teórica dos modos normais de vibração de uma viga bi-engastada. Este estudo é importante para se entender como as frequências naturais de oscilação podem ser afetadas por carregamentos dinâmicos aplicados nas vigas. O modelo será construído utilizando-se a formulação Lagrangiana da Mecânica Clássica baseada no princípio de Hamilton (BARCELOS NETO, 2004). Isso se justifica porque as equações de movimento que expressam o deslocamento em função do tempo podem ser acopladas, visto que no caso de um sistema contínuo, a vibração de uma região do sistema induz movimento semelhante em outra região do sistema (GRANDINETTI; FILHO, 2004). Apesar do formalismo Lagrangiano não ser matéria presente nas disciplinas de Física e Mecânica dos cursos de Engenharia, acreditamos que com o auxílio da modelagem computacional em conjunto com simulações interativas, podemos apresentar um método onde o aprendizado dos modelos estudados e do formalismo utilizado seja bastante intuitivo.

MATERIAL E MÉTODOS

Para a modelagem dos modos normais de vibração de uma viga bi-engastada de massa M (Figura 1) utilizou-se um modelo analítico simplificado formado por duas massas $M/2$ vinculadas à parede e entre si por molas ideais com constante de elasticidade K (Figura 2). Este modelo constitui um sistema de dois graus de liberdade, não-amortecido.

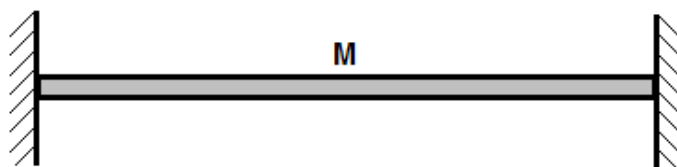


Figura 1. Viga bi-engastada de massa M .

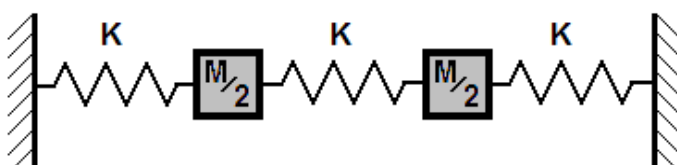


Figura 2. Sistema massa mola com dois graus de liberdade.

A simulação computacional foi construída no programa Modellus (TEODORO, 2002). O programa possui potencial para o apoio às atividades de modelagem matemática e facilita a construção e exploração de modelos físicos. Ele foi desenvolvido por um grupo de pesquisadores na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade

Nova de Lisboa e é distribuído gratuitamente para fins educacionais (UNL, 2007). Quando inserimos no programa as equações que descrevem a dinâmica de oscilação da viga modelada, optamos por deixar a maior parte das condições iniciais em aberto, passíveis de alteração, promovendo uma maior interação do usuário com o módulo.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Lagrangiana do sistema massa mola com dois graus de liberdade foi obtida a partir da energia cinética do sistema, associada ao movimento das massas, e o potencial elástico, associado à energia elástica armazenada nas molas quando o sistema oscila. Resolvendo a Equação de Lagrange para um sistema conservativo, determinou-se as equações do movimento escritas na notação matricial como segue:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (1)$$

onde: $[M]$ é a matriz de inércia e $[K]$ é a matriz de rigidez.

As frequências naturais de oscilação ω_1 e ω_2 foram obtidas através da equação característica e apresentaram dependência de K e M (respectivamente, constante elástica e massa) como era esperado. Como o sistema não é amortecido nem forçado, os modos normais de vibração são caracterizados exclusivamente pelo tipo estrutura da viga. Isso leva a um problema de autovalor e autovetor possibilitando o desacoplamento das equações de movimento que descrevem o comportamento dinâmico do sistema (GRANDINETTI; FILHO, 2004).

O módulo de simulação construído no *software* Modellus se mostrou simples e visualmente interessante, permitindo a interação com facilidade para realizar de uma maneira intuitiva os experimentos conceituais com o modelo matemático proposto. Isso mostra que esta pode ser uma forma alternativa de ensino que contribui positivamente na relação ensino/aprendizagem.

CONCLUSÃO

Neste trabalho obtivemos as frequências naturais de vibração de uma viga bi-engastada representada através de um modelo teórico simplificado de dois graus de liberdade. As frequências obtidas são dependentes somente dos parâmetros estruturais da viga e o uso do método de Lagrange permitiu o desacoplamento das equações de movimento do sistema. O entendimento desse modelo simples, futuramente nos permite avançar no estudo de sistemas com n graus de liberdade e contínuos, submetidos a diversas formas de carregamento.

O programa Modellus mostrou-se adequado para a modelagem do comportamento dinâmico do sistema. Sua utilização é fácil e suas possibilidades visuais, com os gráficos e animações, favorecem a exploração didática do modelo matemático. Somando-se à estas qualidades o fato de ser um programa livre, que é distribuído gratuitamente na Internet, o Modellus se configura como uma ferramenta pedagógica vantajosa em relação às alternativas pagas e linguagens de programação.

REFERÊNCIAS

BARCELOS NETO, J. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**. 1º Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004. 431 p.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. **Mecânica Vetorial para Engenheiros**. 5º ed. São Paulo: Makron Books, 1994. 793 p.

GENOVESE, M. , et. al. Damage detection using an hybrid formulation between changes in curvature mode shapes and neural networks. In: **CILAMCE - 22nd. Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2001, Campinas. Anais do XXII CILAMCE, p. 1-10.

GOMES DA SILVA, D. **Vibrações ressonantes não-lineares em estruturas tipo viga sob excitação paramétrica e combinada**. São Carlos, 2006. 341 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

GRANDINETTI, F. J.; FILHO, E. A. Comparação dos modos de vibrações teórico e experimental em vigas com trincas. **Rev. Ciências. Exatas**, Taubaté, v. 9/10, n. 1-2, p. 61-67, 2004.

NAYFEH, A. H.; PAI, P. F. **Linear and Nonlinear Structural Mechanics**. New York: Wiley & Sons, 2004. 746 p.

TEODORO, V. D. **Modellus**: Learning Physics with Mathematical Modelling. Lisboa, 2002. PhD Thesis - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

UNL - UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA. Faculdade de Ciências e Tecnologia. **Modellus Web Page**. Disponível em: <<http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/>>. Acesso em: 10 de agosto de 2007.