



## MODELAGEM DE VIBRAÇÕES EM VIGAS BI-ENGASTADAS COM FISSURAS

Ronaldo Pilar<sup>1</sup>; Adriano Mohr Bonatto<sup>1</sup>; Jonathan Alexandre Estrela<sup>1</sup>; Emerson Mario Boldo<sup>2</sup>

**RESUMO:** Vigas são um tipo de estrutura que rotineiramente são encontradas em obras de engenharia. Em muitos projetos só existe a preocupação com o comportamento dessas estruturas submetidas a cargas estáticas, assumindo que as mesmas sejam aplicadas lentamente e a estrutura permaneça em equilíbrio após certo instante. No entanto, em muitas situações as vigas podem estar sujeitas às mais variadas formas de carregamentos dinâmicos impondo às vigas um estado vibratório. Portanto é fundamental entender o comportamento dessas estruturas quando submetidas a esse tipo de esforço. Este trabalho apresenta um estudo teórico dos modos normais de vibração de vigas bi-engastadas com fissuras, que levam à depreciação das suas características mecânicas. O problema foi abordado através da formulação Lagrangiana da Mecânica Clássica com aplicação de coordenadas generalizadas. Verificou-se que a presença e a posição da trinca ao longo da viga são fatores que afetam as frequências de oscilação naturais da estrutura. Com a aplicação do modelo teórico e através da modelagem computacional, foi construída uma simulação com o objetivo de apresentar o conteúdo estudado de uma forma interativa, lúdica e mais didática aos alunos de engenharia.

**PALAVRAS-CHAVE:** Fissuras; Mecânica Lagrangiana; Modulus; Vigas.

### INTRODUÇÃO

Elementos estruturais do tipo viga são muito encontrados em obras de engenharia devido à sua facilidade de construção e suas características mecânicas particulares, sempre respeitando a relação viga-laje-pilar. Segundo BEER (1994), vigas são barras longas prismáticas e retas, projetadas para suportar cargas aplicadas em vários pontos ao longo de seu comprimento. Elas podem ainda ser classificadas em referência ao modo pelo qual estão vinculadas, existindo tipos como: simplesmente apoiada, em balanço ou bi-engastada. Cada um desses tipos oferece diferentes valores de contorno, quando da resolução de problemas onde esforços estão atuando sobre as vigas, deixando livre para engenheiros e arquitetos o projeto de uma gama de formas estruturais.

Por apresentar formas simples estando no estado “são” (material homogêneo, isotrópico e contínuo), a viga possui uma predisposição linear na propagação de suas tensões internas. Qualquer desconformidade desse estado acarreta um diferente propagamento dessas tensões (NAYFEH; PAI, 2004).

Fissuras são pequenas falhas estruturais que interrompem a continuidade da viga, afetando principalmente sua resistência a carregamentos e em alguns casos, também depreciando as formas arquitetônicas.

<sup>1</sup> Discentes do Curso de Engenharia Civil. Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - UNIOESTE - Cascavel - PR. Integrantes do Programa de Iniciação Científica Voluntário - PICV/UNIOESTE/PRPPG. [adrianombonatto@yahoo.com.br](mailto:adrianombonatto@yahoo.com.br); [jonathan\\_estrela@hotmail.com](mailto:jonathan_estrela@hotmail.com); [ronaldorilar@hotmail.com](mailto:ronaldorilar@hotmail.com)

<sup>2</sup> Docente da UNIOESTE. Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas - UNIOESTE - Cascavel - PR. [emb@unioeste.br](mailto:emb@unioeste.br)

Em nosso dia-a-dia é raro nos depararmos com residências, edifícios, pontes, ou qualquer tipo de construção, que não apresentem nenhum tipo de fissura (BENTO; et. al., 2002). O Brasil, devido ao seu vasto território, apresenta condições climáticas bastante diferenciadas com regiões onde a temperatura varia bruscamente durante vários meses do ano. Esse fator por si só, faz com que todas as obras, sejam elas de pequeno, médio ou grande porte, apresentem fissuras no decorrer de sua vida útil. Somado a isso, as trincas podem advir também de: erros de projeto, execução, agressividade do meio ambiente, interação solo-estrutura (recalque), má escolha de materiais e carregamentos aperiódicos que acarretam fadiga na estrutura.

Uma viga quando carregada tem um determinado arranjo das suas tensões internas, porém se ela apresentar fissuras, esse arranjo interno se altera para o mesmo carregamento devido à diminuição de sua área resistente. Isso desloca a linha neutra, criando um novo quadro de tensões desconhecido, que pode ultrapassar seus limites de resistência e levar a estrutura à ruptura.

Este trabalho tem como objetivo realizar uma modelagem teórica de uma viga bi-engastada apresentando fissuras em diferentes posições e analisar como estas configurações afetam os modos normais de vibração da estrutura. A importância dessa investigação se destaca fundamentalmente para o entendimento de como as frequências naturais de oscilação podem ser afetadas por carregamentos dinâmicos aplicados nas vigas que apresentam fissuras. O modelo será construído utilizando-se a formulação Lagrangiana da Mecânica Clássica e aplicação de coordenadas generalizadas (BARCELOS NETO, 2004). Após o modelo pronto, foi realizada uma simulação computacional do fenômeno analisado, objetivando que o aprendizado do modelo estudado e do formalismo utilizado se torne bastante intuitivo. O uso de recursos multimídia como ferramenta didática, em especial no ensino de Engenharia, já vem sendo empregado com certo êxito no Brasil (ASSIS, 2003; NORONHA, 2000). A modelagem computacional possui um grande potencial para permitir que os estudantes entendam os princípios teóricos das ciências exatas. Esta ferramenta pedagógica é de grande valia para o aumento da percepção do aluno e para auxiliar a construção do conhecimento, pois pode incorporar em um só momento diversas formas de representação do sistema em estudo. Desse modo, a modelagem contribui para o desenvolvimento cognitivo em geral, facilita a construção de relações e significados, potencializando as possibilidades pedagógicas da interação professor-aluno (GRECA; MOREIRA, 2002). Espera-se que essa ferramenta seja útil para proporcionar uma abordagem mais interativa do modelo analisado neste trabalho, facilitando a absorção do conhecimento científico pelos estudantes.

## **MATERIAL E MÉTODOS**

Para a modelagem dos modos normais de vibração de uma viga bi-engastada de massa  $M$  apresentando uma fissura na parte central de sua estrutura (Figura 1), utilizou-se um modelo analítico simplificado formado por duas massas  $M/2$  fixadas à parede por molas ideais com constante de elasticidade  $K_1$ . O vínculo entre as duas massas é feito por uma mola ideal com constante elástica  $K_2$  representando a fissura, porque nesta parte da viga a vibração se propagará de modo diferente (Figura 2). Este modelo constitui um sistema de dois graus de liberdade, não-amortecido. A dinâmica desse tipo de sistema é descrita por duas equações de movimento, cada uma associada à respectiva coordenada de posição  $X_1$  e  $X_2$  de cada massa  $M/2$ .

Uma fissura perto da parede pode ser modelada de maneira semelhante, somente trocando as posições das molas ideais  $K_1$  e  $K_2$  de maneira conveniente.

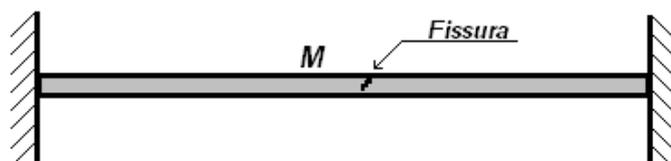


Figura 1. Viga bi-engastada de massa  $M$  com fissura na parte central.

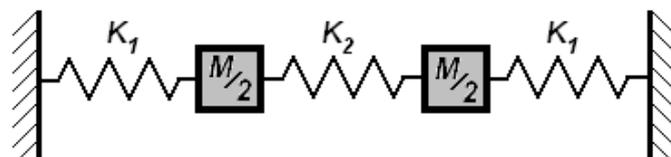


Figura 2. Modelo analítico do sistema massa mola com dois graus de liberdade.

A simulação computacional foi construída no programa Modellus (TEODORO, 2002). O programa foi criado para o apoio às atividades de modelagem matemática e facilita a construção e exploração de modelos físicos porque é utilizado pelo usuário praticamente sem recorrer a linguagens de programação, utilizando, ao contrário, processos de representação muito próximos da escrita normal. Isso é uma característica facilitadora fundamental na medida em que não exige o conhecimento de uma nova sintaxe. Ele foi desenvolvido por um grupo de pesquisadores na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa e é distribuído gratuitamente na Internet para fins educacionais (UNL, 2007). Quando inserimos no programa as equações que descrevem a dinâmica de oscilação da viga modelada, optamos por deixar a maior parte das condições iniciais em aberto, passíveis de alteração, promovendo uma maior interação do usuário com a simulação.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Encontrando a energia cinética total do sistema, associada ao movimento das massas  $M/2$  e a energia potencial elástica, associada à energia elástica armazenada nas molas ideais  $K_1$  e  $K_2$  quando o sistema oscila, obtemos a Lagrangiana  $L$  do sistema:

$$L = K_{Total} - U_{el} \quad (1)$$

Resolvendo a equação de Lagrange para um sistema conservativo, determinou-se as equações diferenciais do movimento escritas na notação matricial como segue:

$$\{\ddot{x}\} + [C]\{x\} = 0 \quad (2)$$

onde:  $[C]$  é a matriz dinâmica.

As frequências naturais de oscilação  $\omega_1$  e  $\omega_2$  foram obtidas através da equação característica e apresentaram dependência de  $K_1$ ,  $K_2$  e  $M$  (respectivamente, constante elástica das molas e massa da viga) como era esperado. No entanto as frequências agora são maiores do que os valores associados a uma viga sem fissura. Como o sistema não é amortecido nem forçado, os modos normais de vibração são caracterizados exclusivamente pelo tipo estrutura da viga, com ou sem falha. Isso leva a um problema de autovalor e autovetor que possibilita desacoplar as equações de movimento do sistema (GRANDINETTI; FILHO, 2004). As frequências de vibração para a viga com a fissura posicionada próxima a uma das paredes apresentaram valores ainda maiores, mostrando a forte dependência da propagação oscilatória em relação à posição da falha estrutural.

O módulo de simulação construído no *software* Modellus se mostrou simples e visualmente interessante, permitindo a interação com facilidade para realizar de uma maneira intuitiva os experimentos conceituais com o modelo matemático proposto. Isso mostra que esta pode ser uma forma alternativa de ensino que contribui positivamente na relação ensino/aprendizagem.

## CONCLUSÃO

Utilizando um modelo teórico simplificado de dois graus de liberdade e com o auxílio do formalismo Lagrangiano, no presente trabalho foram determinadas as frequências naturais de oscilação de uma viga bi-engastada com fissura. As frequências obtidas são dependentes somente dos parâmetros estruturais da viga. No entanto foram encontrados valores maiores comparados com as frequências de uma viga sem falha. O entendimento desse modelo simples, nos permitirá avançar no estudo de sistemas com  $n$  graus de liberdade e contínuos, submetidos a diversas formas de carregamento que levam à formação de trincas e, em casos extremos, ao colapso da estrutura.

O programa Modellus mostrou-se adequado para a modelagem do comportamento dinâmico do sistema. Sua utilização é fácil e suas possibilidades visuais, com os gráficos e animações, favorecem a exploração didática do modelo matemático. Vale destacar também, que o Modellus é um *software* livre, distribuído sem custos na Internet e possui uma versão traduzida para o português, o que o torna uma alternativa pedagógica interessante para os professores dos cursos de Engenharia.

## REFERÊNCIAS

- ASSIS, W. S.; BITTENCOURT, T. N.; NORONHA, M. Desenvolvimento de Recursos Multimídia para o Ensino de Estruturas de Concreto. **Revista IBRACON de Estruturas**, São Paulo, vol. 32, p. 41-51, 2003.
- BARCELOS NETO, J. **Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**. 1º Ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004. 431 p.
- BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. **Mecânica Vetorial para Engenheiros**. 5º ed. São Paulo: Makron Books, 1994. 793 p.
- BENTO, J. G. V.; et. al. **Fissuras em Elementos de Concreto Armado**: Características, Causas e Recuperações, São José dos Campos, 2002. 86 f. TCC – Faculdade de Engenharia, Arquitetura e Urbanismo, Universidade do Vale do Paraíba.
- GRANDINETTI, F. J.; FILHO, E. A. Comparação dos modos de vibrações teórico e experimental em vigas com trincas. **Rev. Ciências. Exatas**, Taubaté, v. 9/10, n. 1-2, p. 61-67, 2004.
- GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A. Mental, physical, and mathematical models in the teaching and learning of physics. **Science Education**, v. 86, p. 106-121, 2002.
- NAYFEH, A. H.; PAI, P. F. **Linear and Nonlinear Structural Mechanics**. New York: Wiley & Sons, 2004. 746 p.
- NORONHA, M.; et. al. Multimedia-based Environment in Structural Engineering Education. In: Internacional Conference on Engineering and Computer Education, São Paulo, 2000. **Anais do ICECE 2000**, CD-ROM, 2000.

TEODORO, V. D. **Modellus**: Learning Physics with Mathematical Modelling. Lisboa, 2002.  
PhD Thesis - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

UNL - UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA. Faculdade de Ciências e Tecnologia.  
**Modellus Web Page**. Disponível em: <<http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus/>>. Acesso em: 10 de agosto de 2007.