



FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE SISTEMAS CONTROLADOS ENVOLVENDO DISPOSITIVOS PIEZOELÉTRICOS: UMA ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS, TEORIA DE MINDLIN

Anderson Gonçalves Ernesto¹, Feres Azevedo Salem², Luiz Henry Monken e Silva³

RESUMO: O presente estudo se refere a problemas que relacionam funções de transferência de sistemas controlados envolvendo atuadores e sensores piezoelétricos dispostos em placas, que são amplamente utilizados na teoria de controle. Todavia a resolução de tais modelos de maneira analítica é inviável, sendo um obstáculo para a utilização em meio prático. O trabalho analisou funções de transferência desses sistemas, por meio do método de elementos finitos, desenvolvendo assim, uma base metodológica para o uso extensivo dessa sistemática em sistemas controlados. Baseando os estudos exploratórios na teoria de placas de Mindlin, que servem a estruturas semi-espessas ao tempo em que possuem graus de liberdade ligados a tensões de cisalhamento, que levam a frequências naturais e modos de vibrações mais precisos. O projeto foi iniciado com um levantamento bibliográfico priorizando o entendimento e conhecimento das formulações de elementos finitos existentes, as funções de interpolação, os elementos finitos utilizados e suas matrizes, as condições de contorno e a resolução dos sistemas algébricos resultantes. Em seguida, passou-se a analisar as equações constitutivas do material, entendendo que seu comportamento é dado por uma matriz, formada pelos coeficientes que o compõem traduzindo o desempenho e as interdependências entre as deformações e as tensões existentes.

PALAVRAS-CHAVE: Efeito piezoelétrico, elementos finitos, função de transferência.

1 INTRODUÇÃO

A palavra piezoeletricidade é de origem grega e significa “eletricidade por pressão” Este nome foi proposto por Hankel em 1881 (KATZIR, 2006) para nomear o fenômeno descoberto anos antes pelos irmãos Pierre e Jacques Curie. Eles observaram que cargas positivas e negativas apareciam em diversos locais das superfícies dos cristais quando comprimidos em diferentes direções (VIVES, 2008). Atualmente diversos sistemas que envolvam controle têm feito uso de dispositivos piezoelétricos.

O projeto de um sistema de controle tem início pelo conhecimento preciso de sua função de transferência (PIEFORT & PREUMONT, 2001). Em sistemas de controle envolvendo atuadores e sensores piezoelétricos, o estabelecimento da função de transferência recai na análise de problema estático ou dinâmico de comportamento

¹ Acadêmico do Curso de Engenharia de Controle e Automação do Centro Universitário de Maringá – CESUMAR, Maringá – Paraná. Bolsista do Programa de Bolsas de Iniciação Científica do Cesumar (PROBIC). andersongernesto@hotmail.com

² Acadêmico do Curso de Engenharia de Controle e Automação do Centro Universitário de Maringá – CESUMAR, Maringá – Paraná. Feres_salem@hotmail.com

³ Orientador, Coordenador e Professor Doutor do Curso de Engenharia de Controle e Automação do Centro Universitário de Maringá – CESUMAR. Maringá – Paraná. Luiz.silva@yahoo.com.br

estrutural pela teoria de placas (TIMOSHENKO & KRIEGER, 1959), acoplado a análise de atuadores e sensores piezoelétricos (ALLIK & HUGHES, 1970).

Em âmbito teórico, a solução desses tipos de problemas só é possível por meio numérico. Pelos resultados alcançados na resolução de problemas de mecânica dos sólidos e de equações diferenciais parciais (ODEN & REDDY, 1976), e por ser de uso difundido no meio científico e especializado em mecânica estrutural (FAIRWEATHER, 1978), o Método de Elementos Finitos é indicado para a modelagem e análise desse tipo de problema.

O presente projeto propõe uma abordagem estrutural pela teoria clássica de placas (Batoz, 1982), empregando elementos finitos que levam em consideração tensões de cisalhamento (Zienkiewicz *et al*, 1971) e apresentam bom comportamento dinâmico. Ainda, a teoria clássica de placas sendo apropriada para pequenas deformações, junto com elementos finitos, como o referido antes, agregam os comportamentos físicos de deformações e tensões desejados para análise desses sistemas de controle, simplificando a análise.

Na sequência dos estudos foi necessário modelar física e matematicamente atuadores e sensores piezoelétricos, partindo da formulação diferencial (forte) obter uma formulação variacional (fraca), modelada por elementos finitos. Pretende-se que esse trabalho seja consolidado no sentido de criar uma base metodológica de análise de sistemas controlados pelo método de elementos finitos, inclusive levando o tratamento dos resultados para ser utilizado em uma interface de tratamento de sinal.

2 MATERIAL E MÉTODOS

O presente projeto de iniciação científica é um desenvolvimento teórico com base em bibliografia especializada na área de mecânica dos sólidos, na área de controle e de equações constitutivas de materiais.

Inicialmente foi realizada uma revisão bibliográfica e a obtenção do estado da arte, relacionando a história, características e particularidades dos materiais piezoelétricos, ferroelétricos e piroelétricos.

Baseando-se na pesquisa de Piefort (2006, p. 25) na qual foi utilizado o PZT (*Lead Zirconate Titanate*, sigla em inglês para Titanato Zirconato de Chumbo), posteriormente foram definidas as matrizes que representam o comportamento deste material, assim como as equações constitutivas, as matrizes de atuação e matrizes de sensoriamento.

Como uma etapa essencial para o desenvolvimento das etapas subsequentes, uma análise, direcionada às equações constitutivas do material escolhido, foi realizada, que definiu o tipo de material, suas constantes e as matrizes que estabelecem estas equações.

Feito isso, foi realizado um estudo sobre o Método de Elementos Finitos voltado para análise de suas formulações, isto é, do ponto de partida do tratamento numérico e de formação das matrizes do modelo numérico e sua resolução, em âmbito de sistemas de grande porte.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Dos estudos procedidos na fase inicial do projeto, constatou-se que a formulação a ser utilizada para a resolução desse tipo de problema de controle é o método de compatibilidade, o qual utiliza o deslocamento transversal da placa como incógnita. Seguindo, foram verificadas as características do dispositivo piezoelétrico. Conforme Jones (1975, p. 61), um material é dito ortotrópico quando a matriz que relaciona tensão-deformação de um material possui 9 (nove) constantes independentes, como é evidenciado na figura 1. A ortotropia indica que um material ao receber as ações

de uma tensão normal em uma direção, deforma-se de modo a estender na direção da tensão e a contrair-se na direção perpendicular. A magnitude desta extensão quando sob uma tensão normal em uma direção apresenta um módulo diferente da extensão do material sob a mesma tensão em outra direção. A figura a seguir ilustra este comportamento.



Figura 1 - Comportamento de um material ortotrópico de acordo com as tensões aplicadas sobre ele (JONES, 1975, p.13)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

Equação 1 - Matriz tensão-deformação genérica para materiais ortotrópicos (JONES, 1975, p.61). A matriz no centro são as constantes independentes, o vetor esquerdo são as tensões e o vetor direito indica as deformações

Feito tal levantamento, foi possível obter a modelagem para o presente caso, sendo parte de um termo similar à matriz tensão-deformação genérica e outro termo que acopla as funções de sensoriamento e atuação dos dispositivos piezoelétricos.

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ 2S_{23} \\ 2S_{31} \\ 2S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{13} \\ 0 & 0 & d_{23} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{24} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}$$

Equação 2 - Atuação do sistema adotado (Piefort, 2006, p. 35). “ T_{ij} ” são as tensões na direção “ ij ”, “ E_{ij} ” é o campo elétrico na direção “ ij ”, a matriz tensão deformação é a que possui coeficientes “ s_{ij} ”, as matrizes de acoplamento são as que possuem coeficientes “ d_{ij} ” e os coeficientes “ ϵ_{ij} ” estão nas matrizes de permissividade

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}$$

Equação 3 - Sensoriamento do sistema adotado (Piefort, 2006, p.35). “ T_{ij} ” são as tensões na direção “ij”, “ E_{ij} ” é o campo elétrico na direção “ij”, a matriz tensão deformação é a que possui coeficientes “ s_{ij} ”, as matrizes de acoplamento são as que possuem coeficientes “ d_{ij} ” e os coeficientes “ ϵ_{ij} ” estão nas matrizes de permissividade. A matriz de deformações é transposta da matriz presente na equação 2. O vetor “ D_{ij} ” representa o campo de deslocamento elétrico na direção “ij”

Tendo obtido a modelagem dos sensores e atuadores piezoelétricos, pode-se dar início a aplicação do Método de Elementos Finitos.

4 CONCLUSÃO

O Método de Elementos Finitos se mostra adequado para a análise de sistemas controlados, tendo em vista que há uma grande generalização na abordagem desses tipos de sistemas.

Sobre o material piezoelétrico, foi constatado que é um material que possui boas propriedades de atuação e sensoriamento, podendo ser utilizado nas mais diversas aplicações, como acelerômetro, máquinas têxtil e nano-posicionamento.

O projeto se encontra ainda em andamento em vista dos estudos orientados envolverem muitos assuntos avançados referentes particularmente à mecânica dos sólidos, análise de vibrações, tipos de formulações e modelagem de problemas físicos, resolução numérica de sistemas de autovalores e autovetores de grande porte.

REFERÊNCIAS

ALLIK, H. & HUGHES, T.J.R. **Finite Element Method for Piezoelectric Vibration**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 2, pp. 151-157, 1970.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures In Engineering Analysis**. New Jersey: Prentice-Hall, 1982.

BATOZ, J. L. **An Explicit formulation for an efficient triangular plate bending element**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 18, pp. 1077-1089, 1982.

JONES, Robert M.. **Mechanics of Composite Materials**. 2. ed. Philadelphia: Taylor & Francis, 1975.

KATZIR, S. **The Beginnings of Piezoelectricity**. Dordrecht: Springer, 2006.

Piefort, V. & Preumont, A. **Finite Element Modeling of Piezoelectric Structures**. Active Structures Laboratory. Brussels, Belgium, 2001.

Timoshenko, S. P. & Krieger, W.S. **Theory of plates and shells**. 2 ed. , Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, 1959.

VIVES, Antonio Arnau. **Piezoelectric transducers and applications**. New York: Springer, 2008.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. & TOO, J. M. **Reduced Integration Techniques in General Analysis of Plates and Shells**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 3, pp. 275-290, 1971.

Anais Eletrônico

VII EPCC – Encontro Internacional de Produção Científica Cesumar
CESUMAR – Centro Universitário de Maringá
Editora CESUMAR
Maringá – Paraná - Brasil