



FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DE SISTEMAS CONTROLADOS ENVOLVENDO DISPOSITIVOS PIEZOELÉTRICOS: UMA ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS, TEORIA CLÁSSICA

Mateus de Camargo¹, Lenon Mendes Pereira², Luiz Henry Monken e Silva³

RESUMO: O presente estudo se refere a problemas que relacionam funções de transferência de sistemas controlados envolvendo atuadores e sensores piezoelétricos dispostos em placas, que são amplamente utilizados na teoria de controle. Todavia a resolução de tais modelos de maneira analítica é inviável, sendo um obstáculo para a utilização em meio prático. O trabalho analisou funções de transferência desses sistemas, por meio do método de elementos finitos, desenvolvendo assim, uma base metodológica para o uso extensivo dessa sistemática em sistemas controlados. Nesse trabalho é usada a teoria clássica de placas finas, mas para o modelo de elementos finitos será testado o elemento discreto de Kirchoff (DKT) para levar em consideração ao menos parcelas das tensões de cisalhamento, e assim obter modos de vibrações. O projeto teve início com um levantamento bibliográfico sobre as formulações de elementos finitos existentes, as funções de interpolação, os elementos finitos utilizados para formação das matrizes do modelo, as condições de contorno e a resolução dos sistemas algébricos resultantes. Em seguida, foram analisadas as equações constitutivas do material, entendendo que seu comportamento é representado na forma de matriz, cujos coeficientes que a compõem traduzem o desempenho e as interdependências entre as deformações e as tensões existentes.

PALAVRAS-CHAVE: Efeito piezoelétrico, elementos finitos, função de transferência.

1 INTRODUÇÃO

A palavra piezoelectricidade é de origem grega e significa “eletricidade por pressão” Este nome foi proposto por Hankel em 1881 (KATZIR, 2006) para nomear o fenômeno descoberto anos antes pelos irmãos Pierre e Jacques Curie. Eles observaram que cargas positivas e negativas apareciam em diversos locais das superfícies dos cristais quando comprimidos em diferentes direções (VIVES, 2008). Atualmente diversos sistemas que envolvam controle têm feito uso de dispositivos piezoelétricos.

O projeto de um sistema de controle tem início pelo conhecimento preciso de sua função de transferência (PIEFORT & PREUMONT, 2001). Em sistemas de controle envolvendo atuadores e sensores piezoelétricos, o estabelecimento da função de transferência recai na análise de problema estático ou dinâmico de comportamento estrutural pela teoria de placas (TIMOSHENKO & KRIEGER, 1959), acoplado a análise de atuadores e sensores piezoelétricos (ALLIK & HUGHES, 1970).

¹ Acadêmico do curso de Engenharia de Controle e Automação do Centro Universitário de Maringá – CESUMAR, Maringá – Paraná. Bolsista do Programa de Iniciação Científica do Cesumar (PROBIC). mateuscamargo77@gmail.com

² Acadêmico do curso de Engenharia de Controle e Automação do Centro Universitário de Maringá – CESUMAR, Maringá – Paraná. Bolsista do PIBIC/CNPq. lenonmendes@gmail.com

³ Orientador, Professor Doutor e Coordenador do curso de Engenharia de Controle e Automação do Centro Universitário de Maringá – CESUMAR, Maringá - Paraná. luiz.silva@cesumar.br

Em âmbito teórico, a solução desses tipos de problemas só é possível por meio numérico. Pelos resultados alcançados na resolução de problemas de mecânica dos sólidos e de equações diferenciais parciais (ODEN & REDDY, 1976), e por ser de uso difundido no meio científico e especializado em mecânica estrutural (FAIRWEATHER, 1978), o Método de Elementos Finitos é indicado para a modelagem e análise desse tipo de problema.

Nesse trabalho propõem-se uma abordagem estrutural pela teoria clássica de placas finas (BATOZ, 1982), empregando elementos finitos que levam em consideração de maneira discreta tensões de cisalhamento (BATHE, 1982) e apresentam bom comportamento em análise de vibrações naturais. Ainda, a teoria clássica de placas sendo apropriada para pequenas deformações, junto com elementos finitos como antes referido, agregam os comportamentos físicos de deformações e tensões desejados para análise desses sistemas de controle, simplificando a análise.

Na sequência dos estudos foi necessário modelar física e matematicamente atuadores e sensores piezoelétricos, partindo da formulação diferencial (forte) obter uma formulação variacional (fraca), modelada por elementos finitos. Pretende-se que esse trabalho seja consolidado no sentido de criar uma base metodológica de análise de sistemas controlados pelo método de elementos finitos, inclusive levando o tratamento dos resultados para ser utilizado em uma interface de tratamento de sinal.

2 MATERIAL E MÉTODOS

O presente projeto de iniciação científica é um desenvolvimento teórico com base em bibliografia especializada na área de mecânica dos sólidos, na área de controle e de equações constitutivas de materiais.

Inicialmente foi realizada uma revisão bibliográfica e a obtenção do estado da arte, relacionando a história, características e particularidades dos materiais piezoelétricos, ferroelétricos e piroelétricos.

Baseando-se na pesquisa de Piefort (2006, p. 25) na qual foi utilizado o PZT (*Lead Zirconate Titanate*, sigla em inglês para Titanato Zirconato de Chumbo), posteriormente foram definidas as matrizes que representam o comportamento deste material, assim como as equações constitutivas, as matrizes de atuação e matrizes de sensoriamento.

Como uma etapa essencial para o desenvolvimento das etapas subsequentes, uma análise, direcionada às equações constitutivas do material escolhido, foi realizada, que definiu o tipo de material, suas constantes e as matrizes que estabelecem estas equações.

Feito isso, foi realizado um estudo sobre o Método de Elementos Finitos voltado para análise de suas formulações, isto é, do ponto de partida do tratamento numérico e de formação das matrizes do modelo numérico e sua resolução, em âmbito de sistemas de grande porte.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Dos estudos procedidos na fase inicial do projeto, constatou-se que a formulação a ser utilizada para a resolução desse tipo de problema de controle é o método de compatibilidade, o qual utiliza o deslocamento transversal da placa como incógnita.

Seguindo, foram verificadas as características do dispositivo piezoelétrico. Conforme Jones (1975, p. 61), um material é dito ortotrópico quando a matriz que relaciona tensão-deformação de um material possui nove constantes independentes, como é evidenciado na figura 1. A ortotropia indica que um material ao receber as ações de uma tensão normal em uma direção, deforma-se de modo a estender na direção da tensão e a contrair-se na direção perpendicular. A magnitude desta extensão quando sob uma tensão normal em uma direção apresenta um módulo diferente da extensão do

material sob a mesma tensão em outra direção. A figura a seguir ilustra este comportamento.



Figura 1 - Comportamento de um material ortotrópico de acordo com as tensões aplicadas sobre ele (JONES, 1975, p.13).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}$$

Equação 1 - Matriz tensão-deformação genérica para materiais ortotrópicos (JONES, 1975, p.61). A matriz no centro são as constantes independentes, o vetor esquerdo são as tensões e o vetor direito indica as deformações.

Feito tal levantamento, foi possível obter a modelagem para o presente caso, sendo parte de um termo similar à matriz tensão-deformação genérica e outro termo que acopla as funções de sensoriamento e atuação dos dispositivos piezoelétricos.

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ 2S_{23} \\ 2S_{31} \\ 2S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{13} \\ 0 & 0 & d_{23} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{24} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}$$

Equação 2 - Atuação do sistema adotado (PIEFORT, 2006, p. 35). “ T_{ij} ” são as tensões na direção “ ij ”, “ E_{ij} ” é o campo elétrico na direção “ ij ”, a matriz tensão deformação é a que possui coeficientes “ s_{ij} ”, as matrizes de acoplamento são as que possuem coeficientes “ d_{ij} ” e os coeficientes “ ϵ_{ij} ” estão nas matrizes de permissividade.

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_{23} \\ T_{31} \\ T_{12} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix}$$

Equação 3 - Sensoriamento do sistema adotado (PIEFORT, 2006, p.35). “ T_{ij} ” são as tensões na direção “ij”, “ E_{ij} ” é o campo elétrico na direção “ij”, a matriz tensão deformação é a que possui coeficientes “ s_{ij} ”, as matrizes de acoplamento são as que possuem coeficientes “ d_{ij} ” e os coeficientes “ ϵ_{ij} ” estão nas matrizes de permissividade. A matriz de deformações é transposta da matriz presente na equação 2. O vetor “ D_{ij} ” representa o campo de deslocamento elétrico na direção “ij”

Tendo obtido a modelagem dos sensores e atuadores piezoelétricos, pode-se dar início à aplicação do Método de Elementos Finitos.

4 CONCLUSÃO

O Método de Elementos Finitos se mostra adequado para a análise de sistemas controlados, tendo em vista que há uma grande generalização na abordagem desses tipos de sistemas. Para bons resultados serem alcançados com a teoria clássica, estudos exploratórios com elementos contendo ou que possuem graus de liberdade discretos – o qual não é associado a funções de interpolação – os quais levam em conta tensões de cisalhamento. Com isso, é esperado que tais elementos discretos tenham a mesma função que os graus de liberdade distribuídos que possui a teoria de Mindlin, melhorando as frequências naturais e módulos de vibração.

Sobre o material piezoelétrico, foi constatado que ele possui boas propriedades de atuação e sensoriamento, podendo ser utilizado nas mais diversas aplicações, como acelerômetros, máquinas têxteis e nano-posicionamento.

O projeto se encontra ainda em andamento em vista dos estudos orientados envolverem muitos assuntos avançados referentes particularmente à mecânica dos sólidos, análise de vibrações, tipos de formulações e modelagem de problemas físicos, resolução numérica de sistemas de autovalores e autovetores de grande porte.

REFERÊNCIAS

ALLIK, H. & HUGHES, T.J.R. **Finite Element Method for Piezoelectric Vibration**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 2, pp. 151-157, 1970.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures In Engineering Analysis**. New Jersey: Prentice-Hall, 1982.

BATOZ, J. L. **An Explicit formulation for an efficient triangular plate bending element**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 18, pp. 1077-1089, 1982.

JONES, Robert M.. **Mechanics of Composite Materials**. 2. ed. Philadelphia: Taylor & Francis, 1975.

KATZIR, S. **The Beginnings of Piezoelectricity**. Dordrecht: Springer, 2006.

Piefort, V. & Preumont, A. **Finite Element Modeling of Piezoelectric Structures**. Active Structures Laboratory. Brussels, Belgium, 2001.

Timoshenko, S. P. & Krieger, W.S. **Theory of plates and shells**. 2 ed. , Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha, 1959.

VIVES, Antonio Arnau. **Piezoelectric transducers and applications**. New York: Springer, 2008.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. & TOO, J. M. **Reduced Integration Techniques in General Analysis of Plates and Shells**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 3, pp. 275-290, 1971.