



ANÁLISE NÃO LINEAR FÍSICA DE TRELIÇAS PLANAS POR ELEMENTOS FINITOS CONSIDERANDO A MECÂNICA DO DANO

Luiz Antonio Farani de Souza¹

RESUMO: Treliza é uma estrutura constituída por elementos lineares que podem estar dispostos em diversos planos - estruturas bidimensionais ou tridimensionais. Usualmente são construídas em madeira ou aço, sendo relativamente leves e indicadas para superar grandes vãos ou suportar carregamentos elevados. Para efeito de projeto, deseja-se conhecer o carregamento último de colapso e sua resposta força aplicada *versus* deslocamento. Na atualidade, sistemas em treliças de dimensões e complexidade cada vez maiores têm sido usados numa grande variedade de aplicações práticas da engenharia. A capacidade de cobrir grandes vãos e áreas com relações resistência/peso eficientes, frequentemente fazem das estruturas treliçadas as mais econômicas em termos de materiais e custo global. Neste artigo são apresentadas análises numéricas de treliças planas por meio do Método dos Elementos Finitos considerando o efeito da não linearidade física. Um código computacional é desenvolvido, em teoria dos pequenos deslocamentos, para a determinação da trajetória de equilíbrio da estrutura. O sistema de equações não lineares é solucionado com o método incremental e iterativo de Newton - Raphson associado à técnica de continuação Controle de Deslocamento Generalizado. O material é descrito por um modelo constitutivo baseado na Mecânica do Dano Contínuo, com a possibilidade de prever o comportamento diferenciado à tração e à compressão. Os resultados numéricos de problemas de treliças planas obtidos a partir do programa computacional desenvolvido são confrontados com os resultados teóricos ou numéricos disponíveis na literatura. A modelagem proposta apresenta potencialidade na simulação numérica do comportamento estrutural de treliças planas devido a sua reduzida complexidade e baixo custo computacional.

PALAVRAS-CHAVE: Elementos Finitos; Mecânica do Dano; não linearidade física; treliza plana.

1 INTRODUÇÃO

As estruturas treliçadas têm grande aplicação na Engenharia Estrutural, sendo que os métodos de análises lineares destes tipos de estruturas já estão bastante consolidados. Atualmente sistemas em treliças de dimensões e complexidade cada vez maiores têm sido usados numa grande variedade de aplicações práticas da engenharia. A capacidade de cobrir grandes vãos e áreas com relações resistência/peso eficientes, frequentemente fazem das estruturas treliçadas as mais econômicas em termos de materiais e custo global. O advento do uso de sistemas treliçados em estruturas de grande complexidade, tais como, torres de linhas de transmissão, pontes e mesmo estruturas aeroespaciais, tem exigido o uso intensivo de computadores e técnicas apuradas de análise matricial (LEITE, 2000).

Para efeito de projeto deseja-se conhecer o carregamento último de colapso e sua resposta força aplicada *versus* deslocamento. Dependendo das características da estrutura, esta resposta pode ser linear ou não linear. No comportamento não linear não há proporcionalidade entre o carregamento aplicado e as deformações e/ou deslocamentos. De maneira geral, podem-se identificar três tipos de comportamento não linear: física, geométrica e de contato (MARTINS et al., 2014).

Na análise estrutural muitos problemas estão caracterizados pelo comportamento inelástico dos materiais que conformam as estruturas, identificando fenômenos tais como plasticidade, dano, fraturamento, entre outros, os quais mudam substancialmente as propriedades de rigidez do sistema. Um problema complexo gerado pela inelasticidade dos materiais é a ocorrência de deformações localizadas no sistema. A consideração desse fenômeno aumenta a complexidade da análise e pode levar a problemas na implementação numérica, acontecendo inclusive a interrupção da análise por problemas de convergência ou mal condicionamento numérico (MUÑOZ.; ROEHL, 2012).

Com o advento da computação de alto desempenho e dos métodos de análise, além da necessidade crescente de se obter análises computacionais mais precisas, a formulação e aplicação de modelos de dano tem sido utilizada para representar de forma satisfatória a degradação material, quando este é submetido à ação de agentes externos, tais como: carregamentos, campos de temperatura, radiação, magnetismo, envelhecimento, dentre outros. A variável dano é um indicador de falha material, independente da sua natureza (escalar ou tensorial) e de como é acoplada ao processo físico de degradação. Dessa forma, a aplicação desses modelos de degradação material abrange os mais diferentes tipos de materiais utilizados no campo da engenharia (CARNIEL, 2013).

¹ Professor Dr. do Curso de Engenharia Civil da UTFPR, campus Apucarana - Pr. lasouza@utfpr.edu.br



Este artigo apresenta uma proposta de modelagem de estruturas do tipo treliça, por meio do Método dos Elementos Finitos, levando em consideração o efeito da não linearidade física. O comportamento do material é descrito por um modelo constitutivo baseado na Mecânica do Dano Contínuo proposto por Manzoli (1998). As análises não lineares estáticas são efetuadas considerando o método de Newton - Raphson associado à técnica de continuação Controle de Deslocamento Generalizado (GDCM). As soluções de problemas encontrados na literatura com a formulação implementada são comparadas com resultados teóricos ou numéricos, demonstrando a consistência e precisão do código computacional desenvolvido. As simulações são realizadas com o programa gratuito Scilab.

2 MODELO DE ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA PLANA

A matriz de rigidez elementar (\mathbf{k}_e) e o vetor de força interna elementar (\mathbf{f}_i) no sistema de coordenadas locais são escritos por, respectivamente:

$$\mathbf{k}_e = \frac{(1-d)E_0A}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{f}_i = \frac{(1-d)E_0A}{L_0} \begin{bmatrix} u_{xi} - u_{xj} \\ 0 \\ -u_{xi} + u_{xj} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde L_0 é o comprimento indeformado da barra; d é o dano; E_0 é o módulo de elasticidade longitudinal inicial do material (não danificado); A é a área da seção transversal; u_{xi} e u_{xj} são os deslocamentos nos nós i e j do elemento de barra, respectivamente; e σ é a tensão normal calculada por:

$$\sigma = (1-d)E_0\varepsilon \quad (3)$$

No sistema de coordenadas globais a matriz \mathbf{K} e o vetor \mathbf{F}_i são determinados por, respectivamente:

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T} \quad (4)$$

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_i \quad (5)$$

onde \mathbf{T} é a matriz de rotação dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \quad (6)$$

Na matriz \mathbf{T} , $C = \cos(\alpha)$ e $S = \sin(\alpha)$. Em adição, é incorporada a variável escalar dano $d \in [0,1]$ na rigidez axial do elemento de barra. Para descrever o comportamento do material, utiliza-se um modelo baseado na Mecânica do Dano Contínuo proposto por Manzoli (1998). Para o caso de um elemento unidimensional submetido a uma força axial, a tensão efetiva $\bar{\sigma}$ é expressa por:

$$\bar{\sigma} = E_0\varepsilon \quad (7)$$

O limite de dano inicial r_0 é uma propriedade do material e pode ser relacionado à tensão limite de proporcionalidade f_0 da seguinte forma:

$$r_0 = B_1 \frac{f_0}{\sqrt{E_0}} \quad (8)$$

onde B_1 é um parâmetro do modelo. Define-se a norma da tensão efetiva $\tau(\bar{\sigma})$ por:

$$\tau(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{E_0}} \quad (9)$$

A partir das relações de Kuhn - Tucker, o limite de dano é dado pelo máximo valor da variável α durante o processo de carregamento, tal que:

$$r = \max(r_0, \tau) \quad (10)$$

A partir das Equações (7) e (9), α pode ser expresso em termos da deformação ε por:

$$\tau(\varepsilon) = \sqrt{E_0} \varepsilon \quad (11)$$

A variável dano d é escrita em função do módulo H e do limite de dano r por:

$$d = \frac{r - r_0}{r(1 + H)} \quad (12)$$

Variando-se a função que descreve o módulo H , tem-se na Figura 1 em: (a) o regime elastodegradável perfeito (perfeitamente plástico); em (b) o encruamento linear positivo (endurecimento); em (c) o encruamento linear negativo (abrandamento); e em (d) o abrandamento exponencial.

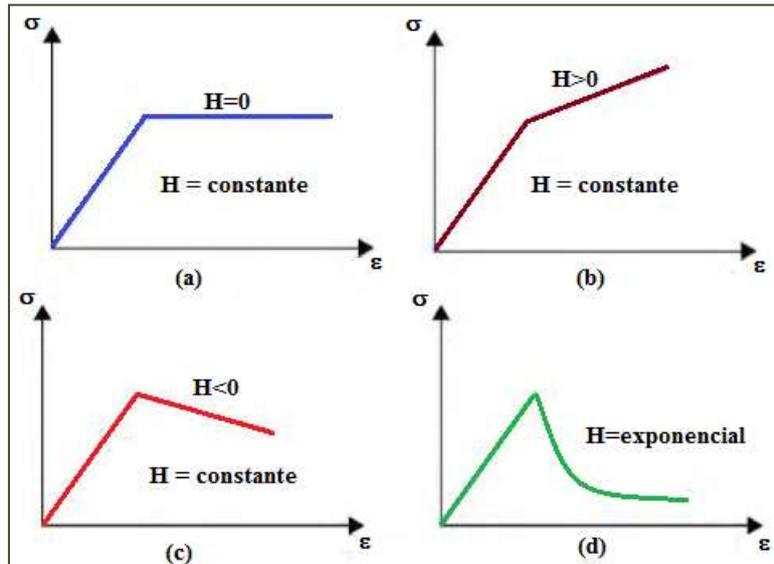


Figura 1 – Comportamentos distintos de endurecimento/abrandamento.

Para o caso de um procedimento incremental, o dano d no passo de carga $t+\Delta t$ pode ser obtido a partir das deformações na barra (ϵ) a cada iteração k pelo algoritmo do modelo constitutivo de dano diferenciado à tração e à compressão apresentado na Figura 2. No algoritmo, os limites de dano inicial r_{0c} e r_{0t} são referentes à compressão e à tração, respectivamente, e os módulos H_c e H_t referem-se à compressão e à tração, respectivamente.

```

Entrada:  $E_0, H_c, H_t, r_{0c}, r_{0t}, \epsilon^{(k-1)}$ 
1) Calcular  $\tau^{(k)} = \sqrt{E_0} |\epsilon^{(k-1)}|$ 
2) Se  $\epsilon^{(k-1)} > 0$  (tração)
   Se  $\tau^{(k)} > r_{0t}$ 
      $r^{(k)} = \tau^{(k)}$ 
     senão
      $r^{(k)} = r_{0t}$ 
   Fim
   Calcular  $d^{(k)} = \frac{r^{(k)} - r_{0t}}{r^{(k)}(1 + H_t)}$ 
   Fim
3) Se  $\epsilon^{(k-1)} < 0$  (compressão)
   Se  $\tau^{(k)} > r_{0c}$ 
      $r^{(k)} = \tau^{(k)}$ 
     senão
      $r^{(k)} = r_{0c}$ 
   Fim
   Calcular  $d^{(k)} = \frac{r^{(k)} - r_{0c}}{r^{(k)}(1 + H_c)}$ 
   Fim
4) Se  $\epsilon^{(k-1)} = 0$ ,  $d^{(k)} = 0$ , Fim
5) Se  $d^{(k)} > 1$ ,  $d^{(k)} = 1$ , Fim
6) Se  $d^{(k)} < 0$ ,  $d^{(k)} = 0$ , Fim
Saída:  $d^{(k)}$ 
    
```

Figura 2 – Algoritmo para o modelo de dano diferenciado à tração e à compressão.

3 MÉTODO DE SOLUÇÃO

Algoritmos existentes de métodos de solução apresentam como passo fundamental a avaliação do vetor de carga residual ${}^{t+\Delta t}\mathbf{g}^{(k-1)}$, e uma nova estimativa para os deslocamentos é obtida por meio do sistema de equações:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^{(k-1)} \tag{13}$$

onde ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(k-1)}$ é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural, $\delta \mathbf{u}^{(k)}$ é o vetor de deslocamentos residuais, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$ é o vetor de forças internas, e ${}^{t+\Delta t}\lambda^{(k-1)}$ é o parâmetro de carga total. No sistema de equações dado em (13)



o superíndice direito refere-se à iteração e o superíndice esquerdo ao passo de incremento de carga. Para a determinação do parâmetro de carga iterativo utiliza-se a estratégia Controle de Deslocamento Generalizado (GDCM). O parâmetro de carga total λ e o vetor de deslocamentos totais \mathbf{u} são obtidos pelas seguintes equações no passo $t + \Delta t$ e na iteração k , respectivamente:

$${}^{t+\Delta t}\lambda^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(k-1)} + {}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)} \quad (14)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k-1)} + {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}^{(k)} \quad (15)$$

A técnica GDCM foi apresentada por Yang e Shieh (1990) e consiste na utilização de um parâmetro geral de rigidez (GSP), que é definido pela seguinte equação:

$$GSP = \frac{{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(1)}} \quad (16)$$

onde ${}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}$ é o vetor de deslocamentos da primeira iteração referente ao primeiro passo de carga. O parâmetro do incremento de carga ${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)}$ é calculado por:

$${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)} = - \frac{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(k)}} \quad (17)$$

O sinal do incremento inicial de carga (${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(1)}$) pode ser positivo ou negativo. A escolha do sinal correto é de suma importância na definição de sequências de soluções que permitam o avanço na resposta carga - deslocamento. O parâmetro de rigidez generalizado (GSP) depende exclusivamente dos vetores ${}^t\delta\mathbf{u}_r$ (passo de carga anterior) e ${}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r$ (passo de carga corrente). A mudança de sinal do parâmetro GSP serve como um indicador para a mudança do sentido de crescimento da carga, uma vez que o mesmo torna-se negativo somente nos incrementos da carga imediatamente após a passagem por pontos limites.

Há possibilidade de que o deslocamento tangente tenda ao infinito em pontos próximos a um ponto limite da trajetória de equilíbrio. Para evitar que isso ocorra, limitou-se este deslocamento a um valor máximo δu_{\max} , de forma que se $\|\delta\mathbf{u}\| > \delta u_{\max}$, então:

$${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)} = \frac{\delta u_{\max}}{\|\delta\mathbf{u}_r^{(k)}\|} {}^1\delta\lambda^{(1)} \quad (18)$$

Uma estratégia adaptativa que pode ser muito útil no emprego da técnica de controle de carga é a determinação automática da variação do parâmetro de carga inicial (${}^1\delta\lambda^{(1)}$) para a definição do valor do parâmetro de carga para a primeira iteração (${}^{t+\Delta t}\lambda^{(1)}$), que consiste em, ao final de cada passo da análise, monitorar o número de iterações requeridas para a convergência (N_{it}) da técnica iterativa e comparar esse número com um valor ótimo (N_{ot}). Por meio desta monitoração, calcula-se ${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(1)}$ para o passo de carga seguinte por (CRISFIELD, 1991):

$${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(1)} = \sqrt{\frac{N_{ot}}{N_{it}}} {}^1\delta\lambda^{(1)} \sqrt{|GSP|} \quad (19)$$

Na Figura 3 é apresentado o algoritmo implementado referente ao método de Newton - Raphson associado à estratégia GDCM.



1) Determinar um valor para o parâmetro de carga inicial ${}^1\delta\lambda^{(1)}$ e fazer ${}^1\lambda^{(0)} = 1$

2) Para a primeira iteração ($k = 1$), em qualquer passo $t + \Delta t$:

- Determinar a matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(0)}$.
- Resolver as equações de equilíbrio $\delta\mathbf{u}_r^{(1)} = \mathbf{K}^{(0)^{-1}}\mathbf{F}_r$ e $\delta\mathbf{u}_g^{(1)} = \mathbf{K}^{(0)^{-1}}\mathbf{g}^{(0)}$
- No primeiro incremento, fazer $\text{GSP} = 1$. Do segundo incremento em diante utiliza-se a equação:

$$\text{GSP} = \frac{{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)\top} {}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)\top} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}$$
- Do segundo passo em diante, usar $\delta\lambda^{(1)} = \sqrt{\frac{N_{ot}}{N_{it}}} {}^1\delta\lambda^{(1)} \sqrt{|\text{GSP}|}$.
- Verificar o sinal de GSP. Se $\text{GSP} < 0$, multiplicar $\delta\lambda^{(1)}$ por -1 para mudar o sentido de crescimento do parâmetro de carga.
- Calcular o deslocamento $\delta\mathbf{u}^{(1)} = \delta\mathbf{u}_g^{(1)} + \delta\lambda^{(1)}\delta\mathbf{u}_r^{(1)}$.

3) Para as próximas iterações ($k \geq 2$) no passo $t + \Delta t$:

- Determinar o vetor das forças $\mathbf{g}^{(k-1)} = \lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i^{(k-1)}$.
- Atualizar a matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(k-1)}$.
- Resolver $\delta\mathbf{u}_g^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)^{-1}}\mathbf{g}^{(k-1)}$ e $\delta\mathbf{u}_r^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)^{-1}}\mathbf{F}_r$.
- Calcular $\delta\lambda^{(k)} = -\frac{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)\top} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)\top} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(k)}}$.
- Calcular os deslocamentos $\delta\mathbf{u}^{(k)} = \delta\mathbf{u}_g^{(k)} + \delta\lambda^{(k)}\delta\mathbf{u}_r^{(k)}$.
- Se $\|\delta\mathbf{u}^{(k)}\| > \delta u_{\max}$, então $\delta\lambda^{(k)} = \frac{\delta u_{\max}}{\|\delta\mathbf{u}_r^{(k)}\|} {}^1\delta\lambda^{(1)}$.

4) Atualizar o parâmetro de carga total λ e o vetor de deslocamentos totais \mathbf{u} :

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)}$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^{(k)}$$

5) Repetir os passos 3) a 4) até que $\|\mathbf{g}^{(k-1)}\| \leq \zeta$.

6) Voltar ao passo 2) para o próximo incremento de carga fazendo $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k)} + 1$.

Figura 3 – Algoritmo para o método de solução.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos de problemas de treliças planas encontrados na literatura, levando-se em conta na análise estática por Elementos Finitos a não linearidade física, com o intuito de verificar a formulação implementada com o programa Scilab. Em todas as análises estruturais considerou-se a tolerância (\square) para a verificação da convergência a cada iteração (k) igual a 10^{-5} , o número de iterações desejadas (N_{ot}) igual a 5, e o deslocamento máximo (δu_{\max}) igual a $\|{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}\|$. Nas simulações é desprezado o peso próprio das estruturas.

4.1 SIMULAÇÃO NUMÉRICA 1

A treliça indicada na Figura 4 consiste de três barras DA, DB e DC. Todas têm o módulo de elasticidade $E_0 = 20500 \text{ kN/cm}^2$, tensão limite de escoamento $f_0 = 34,50 \text{ kN/cm}^2$, e área da seção transversal $A = 12,51 \text{ cm}^2$. Uma força concentrada P é aplicada no nó D e os parâmetros geométricos comprimento L e ângulo β apresentam os valores 200 cm e 45° , respectivamente. Este problema foi estudado por Leite (2000).

Na simulação, considera-se os módulos de endurecimento H_c e H_t constantes e iguais a zero (regime elastodegradável perfeito) e $B_1 = 1$. Para as simulações com a estratégia de solução GDCM, adotam-se o incremento inicial do parâmetro de força ${}^1\delta\lambda^{(1)}$ igual a 10^{-8} e o incremento de força $\Delta P = 30 \text{ kN}$.

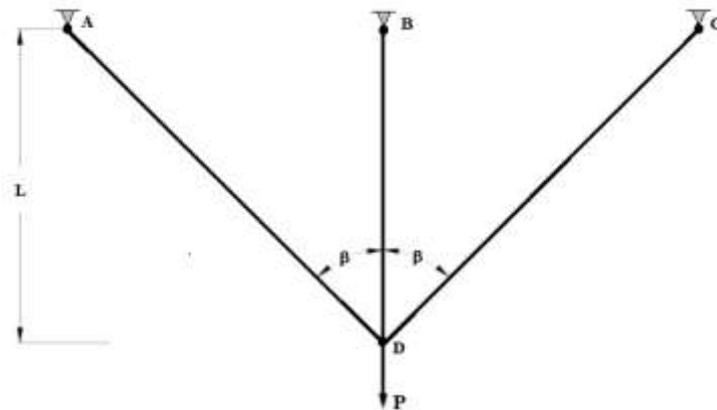


Figura 4 – Esquema estrutural da treliça plana com três barras.

No Gráfico 1 são apresentadas as curvas numéricas deslocamento vertical no nó D *versus* força, comparando os resultados obtidos pela modelagem proposta com os resultados apresentados por Leite (2000). Vê-se nessa figura que os resultados obtidos com a modelagem proposta apresentou boa concordância com o desse autor.

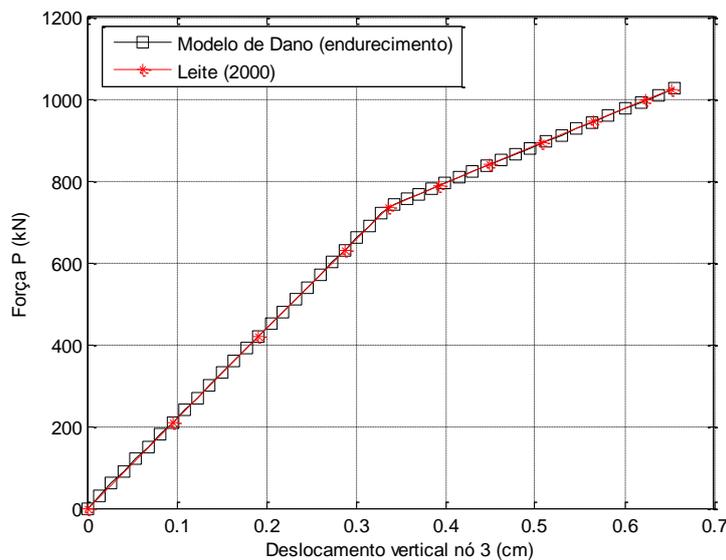


Gráfico 1: Curvas deslocamento vertical no nó D *versus* força P.

No Gráfico 1, vê-se que todas as barras trabalham em regime elástico linear até $P \approx 720$ kN. A partir desse incremento de força somente a barra BD escoam ($d > 0$) diminuindo a rigidez do sistema, conforme indica a mudança de inclinação das curvas numéricas. A trajetória de equilíbrio é obtida até o incremento de força $P \approx 1026,76$ (N = 44), sendo interrompida a simulação. Para o próximo passo de tempo (N = 45) as três barras escoam ($P \approx 1041,96$ kN).

4.2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA 2

Na Figura 5 é mostrada uma estrutura de treliça plana estaticamente indeterminada com duas forças concentradas P aplicadas simetricamente. As propriedades do material e do modelo de dano são apresentadas na Tabela 1. Esta estrutura foi analisada por Gutiérrez (2014). Para as simulações com a estratégia de solução GDCM, adotam-se o incremento inicial do parâmetro de força ${}^1\delta\lambda^{(1)}$ igual a 10^{-8} e o incremento de força $\Delta P = 2,2$ kN.

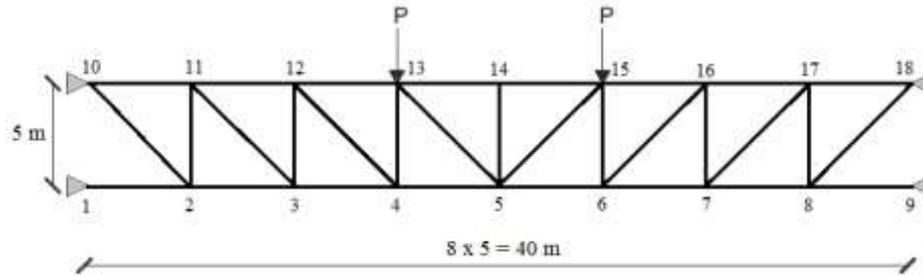


Figura 5 – Treliça hiperestática sujeita a duas forças concentradas.

Tabela 1: Parâmetros do material e do modelo de dano.

Parâmetros	Valores
E_0A	10^5 kN
$f_{0c} = f_{0t}$	65,0 MPa (diagonais) 61,1 MPa (demais barras)
$H_c = H_t$	0,0 (perfeitamente plástico) 0,02 (encruamento linear ou endurecimento)
B_1	1,0

No Gráfico 2 são apresentas as curvas deslocamento vertical no nó 5 *versus* a força concentrada P, considerando dois comportamentos materiais distintos: perfeitamente plástico ($H_c = H_t = 0,00$); e encruamento linear ou endurecimento ($H_c = H_t = 0,02$). Fazendo a análise desse gráfico, vê-se que os resultados numéricos obtidos com o modelo de dano implementado ficaram bastante próximos aos apresentados por Gutiérrez (2014).

Comparando as trajetórias de equilíbrio quanta às análises com os dois comportamentos materiais, as mesmas são coincidentes até a força P igual a 39,6303 kN, aproximadamente. As barras 1-2, 4-5, 5-6 e 8-9 atingem a tensão de escoamento em primeiro, apresentando comportamento plástico ($d > 0$). No entanto, considerando a análise com o endurecimento do material, vê-se que a treliça ficou mais rígida aumentando assim a sua capacidade resistente. Na simulação considerando o comportamento perfeitamente plástico considerou-se o número de passos de carga $N = 50$, e na simulação considerando endurecimento $N = 53$.

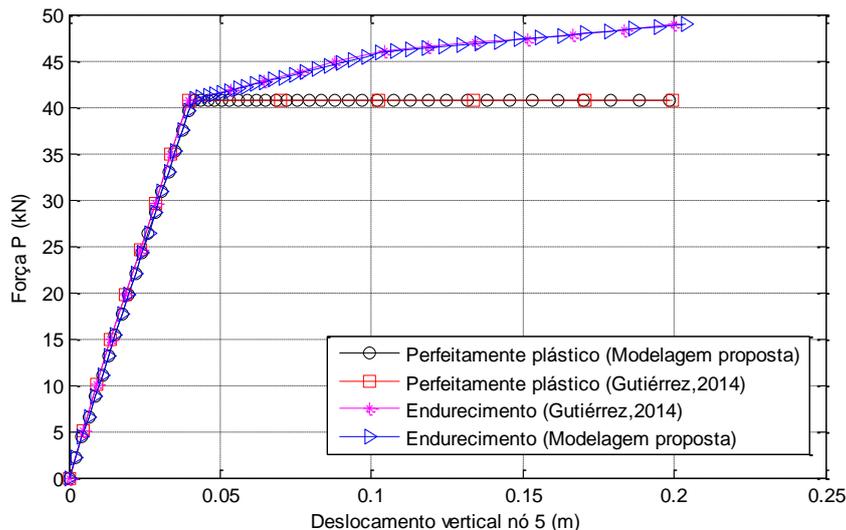


Gráfico 2: Curvas numéricas deslocamento vertical no nó 5 *versus* força P.

4.3 SIMULAÇÃO NUMÉRICA 3

Este exemplo, analisado por Rodrigues (1997) e Santos (2002), é composto por uma treliça metálica biapoiada de 13 barras com área da seção transversal $A = 1,0 \text{ cm}^2$, cujos banzos inferior e superior são paralelos entre si, conforme ilustra a Figura 6. A estrutura é solicitada por uma força concentrada P de intensidade 60 kN no



nó 3 na direção vertical e sentido para baixo. O material das barras apresenta comportamento elastoplástico bilinear (encruamento linear ou endurecimento). Os parâmetros adotados na simulação com os modelos constitutivos são mostrados na Tabela 2. Para as simulações com a estratégia de solução GDCM, adotam-se o incremento inicial do parâmetro de força ${}^1\delta\lambda^{(1)}$ igual a 10^{-8} e o incremento de força $\Delta P = -5$ kN.

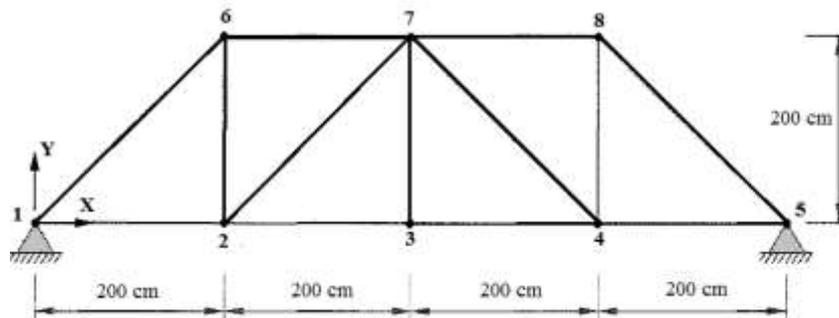


Figura 6 – Treliza plana biapoiada.

Tabela 2: Parâmetros dos modelos constitutivos.

Modelo de Dano	Modelo elastoplástico bilinear
$E_0 = 21000,0 \text{ kN/cm}^2$ $f_{0c} = f_{0t} = 24 \text{ kN/cm}^2$ $H_c = H_t = 0,31$ $B_1 = 1,00$	$E_0 = 21000,0 \text{ kN/cm}^2$ $E_T = 5000,0 \text{ kN/cm}^2$ $\square_{\gamma} = 24,0 \text{ kN/cm}^2$

As trajetórias de equilíbrio para os modelos implementados neste exemplo - modelo de Dano e elastoplástico bilinear - são apresentadas no Gráfico 3. Na Tabela 3 são apresentados os valores numéricos dos deslocamentos verticais do nó 3 obtidos pelos modelos implementados comparando-os com os de Rodrigues (1997) e Santos (2002). Observa-se nessa tabela que a resposta predita pelo Modelo de Dano ficou próxima dos modelos desses autores, com a diferença de 0,16 % e 0,23 %, respectivamente. As simulações foram conduzidas até o incremento de força $P \cong 60$ kN, sendo a convergência (fim da simulação) obtida com o modelo elastoplástico para $N = 26$ passos de força, e para o Modelo de Dano $N = 19$ passos de força.

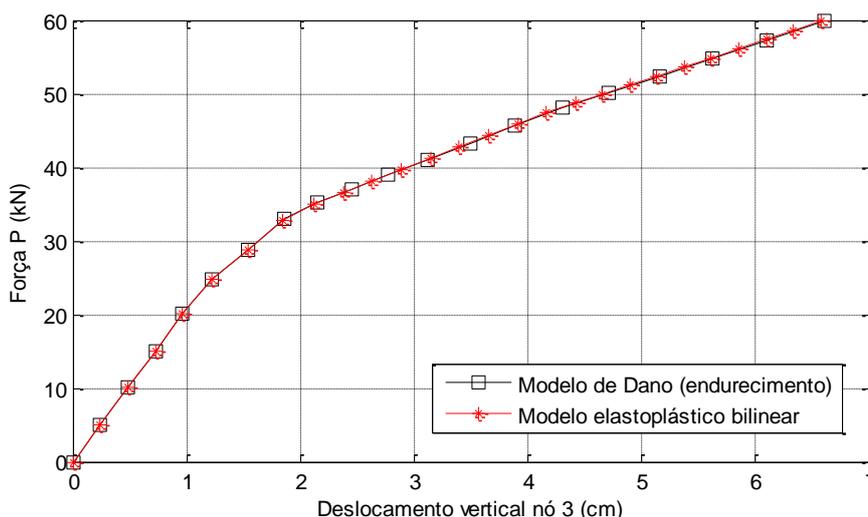


Gráfico 3: Curvas numéricas deslocamento vertical no nó 3 versus força P.

Tabela 3: Deslocamentos verticais no nó 3.

Modelo numérico	Deslocamento vertical no nó 3 (cm)
Rodrigues (1997) - elastoplástico bilinear	-6,611
Santos (2002) - elastoplástico bilinear	-6,585



Modelo proposto - Mecânica do Dano	-6,600350948244230
Modelo elasto-plástico bilinear implementado	-6,570103976029539

5 CONCLUSÃO

A partir dos resultados obtidos do estudo de problemas encontrados na literatura, o programa desenvolvido baseado em um processo incremental-iterativo apresenta potencialidade na análise estrutural de treliças planas considerando a não linearidade física, possibilitando, assim, ao projetista estimar a capacidade resistente última das mesmas (carregamento último e deslocamento máximo correspondente).

A análise com modelos constitutivos baseados na Mecânica do Dano Contínuo constitui uma válida alternativa para o estudo do comportamento estrutural. No entanto, a aplicação de tais modelos em situações práticas fica prejudicada pela identificação experimental dos parâmetros contidos nas leis de evolução das variáveis de dano.

Para desenvolvimentos futuros, sugere-se a implementação de algoritmos que permitam efetuar ciclos de carregamento e descarregamento, a consideração da flambagem nas análises e adequar o código implementado para estudos em análise dinâmica. Também ao modelo de treliça plana, pode-se incorporar um critério de falha, como por exemplo, o da máxima tensão ou o da máxima deformação.

REFERÊNCIAS

CARNIEL, T. A. **Modelo viscoelástico-viscoplástico com dano acoplado em análises transientes não lineares de treliças tridimensionais**. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2013.

CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Vol. 1. Essentials, Chichester, John Wiley & Sons, Inc., 1991.

GUTIÉRREZ, M. P. D. **Análise elasto-plástica de estruturas metálicas usando o conceito de rótulas plásticas e o algoritmo de retorno radial**. Dissertação (Mestrado), Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

LEITE, F. N. **Uma formulação teórica consistente para análise não linear de estruturas treliçadas espaciais**. Dissertação (Mestrado), Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2000.

MANZOLI, O. L. **Um modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes em la mecânica de sólidos**. Tese (Doutorado), Escola Técnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1998.

MARTINS, T. V.; GRECO, M.; LEMONGE, A. C. C. Otimização paramétrica de estruturas treliçadas com objetivo baseado no comportamento pós-crítico via algoritmos genéticos. In: XI Simpósio de Mecânica Computacional, 2014, Juiz de Fora. **Anais...** Juiz de Fora: XI Simpósio de Mecânica Computacional, 2014.

MUÑOZ, L. F. P.; ROEHL, D. M. Comparação de Métodos de Continuação em Problemas com Análise Inelástica. In: Congresso Argentino de Mecânica Computacional, 2012, Salta. **Anais...** Salta: AMCA, v. XXXI, 2012.

RODRIGUES, R. O. **Análise dinâmica bidimensional não linear física e geométrica de treliças de aço e pórticos de concreto armado**. Tese (Doutorado), Faculdade de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1997.

SANTOS, R. M. **Análise de estruturas metálicas reticuladas planas considerando a não linearidade física em sistemas não-conservativos**. Dissertação (Mestrado), Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points. **AIAA Journal**, v. 28, n. 12, p. 2110-2116, 1990.