



ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA DE TRELIÇAS PLANAS POR MEIO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Luiz Antonio Farani de Souza¹

RESUMO: A capacidade de cobrir grandes vãos e áreas com relações resistência/peso eficientes, frequentemente fazem das estruturas treliçadas as mais econômicas em termos de materiais e custo global. O advento do uso de sistemas treliçados em estruturas de grande complexidade, tais como torres de linhas de transmissão, pontes e mesmo estruturas aeroespaciais, tem exigido o uso intensivo de computadores e técnicas apuradas de análise matricial. Para efeito de projeto deseja-se conhecer o carregamento último de colapso e sua resposta deslocamento *versus* força aplicada. Dependendo das características da estrutura, esta resposta pode ser linear ou não linear. No comportamento não linear não há proporcionalidade entre o carregamento aplicado e as deformações e/ou deslocamentos. A solução de problemas não lineares é usualmente obtida por meio da utilização da combinação de esquemas incrementais e iterativos. No contexto da implementação computacional, técnicas de solução devem ter a capacidade de detectar pontos críticos, tais como pontos limites e pontos de bifurcação, e seguir a trajetória de equilíbrio além desses pontos. Este artigo apresenta uma metodologia para a análise não linear de estruturas do tipo treliça, por meio do Método dos Elementos Finitos, levando em consideração o efeito da não linearidade geométrica. O comportamento do material é descrito por um modelo constitutivo elástico linear. O sistema de equações não lineares é solucionado com o método incremental e iterativo de Newton - Raphson associado à técnica de continuação Controle de Deslocamento Generalizado. Exemplos numéricos encontrados na literatura são analisados com o intuito de comprovar a eficiência do código computacional implementado, na determinação do traçado da trajetória de equilíbrio da estrutura de modo a passar por pontos limites.

PALAVRAS-CHAVE: Elementos Finitos; não linearidade geométrica; treliça plana.

1 INTRODUÇÃO

A treliça é uma estrutura constituída por elementos lineares (barras) que podem estar dispostos em diversos planos - estruturas bidimensionais ou tridimensionais. Esse tipo de estrutura é muito utilizado na construção de pontes (rodoviárias e ferroviárias), em estruturas de cobertura de edificações, em torres de transmissão de energia, entre diversos outros usos. Usualmente são construídas em madeira ou aço, sendo relativamente leves e indicadas para superar grandes vãos ou suportar carregamentos elevados. Nesse contexto, as treliças tornam-se uma solução econômica e prática (KRIPKA et al., 2013).

As estruturas treliçadas têm grande aplicação na Engenharia Estrutural, sendo que os métodos de análises lineares deste tipo de estrutura já estão bastante consolidados. Na atualidade, treliças de dimensões e complexidade cada vez maiores têm sido usadas numa grande variedade de aplicações práticas da engenharia. A capacidade de cobrir grandes vãos e áreas com relações resistência/peso eficientes, frequentemente fazem dessas estruturas as mais econômicas em termos de materiais e custo global (LEITE, 2000).

A análise estrutural linear clássica pressupõe proporcionalidade entre carga e deslocamento. As condições para que essa proporcionalidade se verifique são a resposta elástica linear do material e pequenos deslocamentos. A condição de resposta linear do material pode ser garantida limitando-se os níveis de tensão e deformação. No entanto, a de pequenos deslocamentos pode ter implicações que vão além do sentido puramente geométrico. Entende-se por 'pequenos deslocamentos' aqueles que não influenciam na condição de equilíbrio, ou seja, as equações de equilíbrio podem ser escritas referindo-se à estrutura na posição indeformada sem erro significativo (PAULA, 2001).

Em muitos problemas, contudo, mesmo que o campo de deslocamentos do sistema possa ser considerado pequeno, é necessário escrever as equações de equilíbrio na posição deslocada, sob pena de serem desprezadas parcelas importantes, como as referentes às deformações axiais. A análise resultante de uma abordagem na qual a verificação do equilíbrio é feita na posição deslocada, mas o material se mantém num regime de resposta linear elástica, é denominada análise não linear geométrica. Decorrem de um tratamento estático não linear geométrico: a determinação da trajetória de equilíbrio apresentada pela estrutura sob ação de um determinado carregamento; e o estudo da instabilidade do equilíbrio pelo aparecimento de pontos limites ou pontos de bifurcação.

Para se realizar a análise não linear de estruturas com maior precisão é de suma importância que sejam empregadas técnicas que possam considerar de maneira apropriada os efeitos da não linearidade geométrica, e

¹ Professor Dr. do Curso de Engenharia Civil da UTFPR, campus Apucarana - Pr. lasouza@utfpr.edu.br



permitam o traçado completo da trajetória de equilíbrio da estrutura de modo a passar por pontos críticos. Esses pontos são aqueles em que uma trajetória de equilíbrio atinge valores extremos ou aqueles em que diferentes caminhos de equilíbrio se encontram. Na Figura 1 podem ser observados três pontos críticos (A, B e C), onde os pontos B e C são chamados de pontos limite e o ponto A de ponto de bifurcação (RODRIGUES et al., 2008).

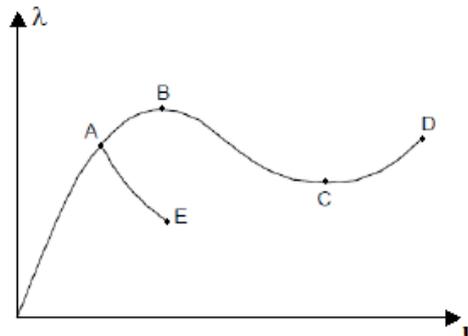


Figura 1 – Trajetória de equilíbrio e pontos críticos.

Treliças quando solicitadas a carregamentos de grande intensidade apresentam a não linearidade geométrica, e essas frequentemente exibem na sua trajetória de equilíbrio (deslocamento versus força) pontos críticos chamados de *snap-through* (ponto crítico em relação à carga) ou *snap-back* (ponto crítico em relação ao deslocamento) que estão relacionados à instabilidade da estrutura. Obter os pontos críticos e o caminho de equilíbrio dessas estruturas requer estratégias numéricas especiais.

Este artigo apresenta uma metodologia para a análise não linear de estruturas do tipo treliça, por meio do Método dos Elementos Finitos, levando em consideração o efeito da não linearidade geométrica. O comportamento do material é descrito por um modelo constitutivo elástico linear. O sistema de equações não lineares é solucionado com o método incremental e iterativo de Newton - Raphson associado à técnica de continuação Controle de Deslocamento Generalizado. Exemplos numéricos encontrados na literatura são analisados com o intuito de comprovar a eficiência do código computacional implementado, na determinação do traçado da trajetória de equilíbrio da estrutura de modo a passar por pontos limites. As simulações são efetuadas com o programa livre Scilab.

2 MODELO DE ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA PLANA

Neste trabalho, optou-se pela formulação Lagrangeana para descrever a posição de equilíbrio do sistema estrutural ao longo do processo de resolução numérica. Neste esquema de solução todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referidas à configuração inicial no tempo zero. A matriz de rigidez (\mathbf{k}_e) e o vetor de força interna (\mathbf{f}_i) no sistema de coordenadas locais são escritos por, respectivamente:

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\sigma A}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{f}_i = \frac{E_0 A}{L_0} \begin{bmatrix} u_{xi} - u_{xj} \\ 0 \\ -u_{xi} + u_{xj} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

onde L_0 é o comprimento indeformado da barra, E é o módulo de elasticidade longitudinal do material, A é a área da seção transversal, u_{xi} e u_{xj} são os deslocamentos nos nós i e j do elemento, respectivamente, e σ é a tensão normal calculada por:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (3)$$

onde ε é a deformação de engenharia determinada pela seguinte equação:

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (4)$$

Na Eq. (4) L é o comprimento deformado da barra. Na Figura 2 é apresentado um desenho esquemático de elemento finito de treliça plana. No sistema de coordenadas globais a matriz \mathbf{K} e o vetor \mathbf{F}_i são determinados por, respectivamente:

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_e \mathbf{T} \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{T}^T \mathbf{f}_i \quad (6)$$

onde \mathbf{T} é a matriz de rotação dada por:



$$T = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \quad (7)$$

Na matriz T , $C = \cos(\alpha)$ e $S = \sin(\alpha)$, sendo que o ângulo α é atualizado a cada iteração em função das coordenadas (x,y) na configuração deformada da estrutura.

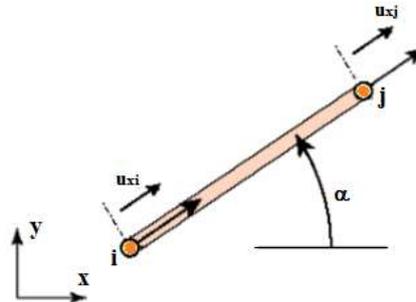


Figura 2 – Elemento finito de treliça plana.

3 MÉTODO DE SOLUÇÃO

Algoritmos existentes de métodos de solução apresentam como passo fundamental a avaliação do vetor de carga residual ${}^{t+\Delta t}g^{(k-1)}$, e uma nova estimativa para os deslocamentos é obtida por meio do sistema de equações:

$${}^{t+\Delta t}K^{(k-1)} \delta u^{(k)} = {}^{t+\Delta t}g^{(k-1)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(k-1)} F_r - {}^{t+\Delta t}F_i^{(k-1)} \quad (8)$$

onde ${}^{t+\Delta t}K^{(k-1)}$ é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural, $\delta u^{(k)}$ é o vetor de deslocamentos residuais, ${}^{t+\Delta t}F_i^{(k-1)}$ é o vetor de forças internas, e ${}^{t+\Delta t}\lambda^{(k-1)}$ é o parâmetro de carga total. No sistema de equações dado em (8) o superíndice direito refere-se à iteração e o superíndice esquerdo ao passo de incremento de carga. Para a determinação do parâmetro de carga iterativo utiliza-se a estratégia Controle de Deslocamento Generalizado (GDCM). O parâmetro de carga total λ e o vetor de deslocamentos totais u são obtidos pelas seguintes equações no passo $t + \Delta t$ e na iteração k , respectivamente:

$${}^{t+\Delta t}\lambda^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(k-1)} + {}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)} \quad (9)$$

$${}^{t+\Delta t}u^{(k)} = {}^{t+\Delta t}u^{(k-1)} + {}^{t+\Delta t}\delta u^{(k)} \quad (10)$$

A técnica GDCM foi apresentada por Yang e Shieh (1990) e consiste na utilização de um parâmetro geral de rigidez (GSP), que é definido pela seguinte equação (RODRIGUES et al., 2008):

$$GSP = \frac{{}^1\delta u_r^{(1)T} {}^1\delta u_r^{(1)}}{{}^t\delta u_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta u_r^{(1)}} \quad (11)$$

onde ${}^1\delta u_r^{(1)}$ é o vetor de deslocamentos da primeira iteração referente ao primeiro passo de carga. O parâmetro do incremento de carga ${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)}$ é calculado por:

$${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)} = - \frac{{}^t\delta u_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta u_g^{(k)}}{{}^t\delta u_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta u_r^{(k)}} \quad (12)$$

O sinal do incremento inicial de carga (${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(1)}$) pode ser positivo ou negativo. A escolha do sinal correto é de suma importância na definição de sequências de soluções que permitam o avanço na resposta carga - deslocamento. O parâmetro de rigidez generalizado (GSP) depende exclusivamente dos vetores ${}^1\delta u_r$ (passo de carga anterior) e ${}^{t+\Delta t}\delta u_r$ (passo de carga corrente). A mudança de sinal do parâmetro GSP serve como um indicador para a mudança do sentido de crescimento da carga, uma vez que o mesmo torna-se negativo somente nos incrementos da carga imediatamente após a passagem por pontos limites.

Há possibilidade de que o deslocamento tangente tenda ao infinito em pontos próximos a um ponto limite da trajetória de equilíbrio. Para evitar que isso ocorra, limitou-se este deslocamento a um valor máximo δu_{\max} , de forma que se $\|\delta u\| > \delta u_{\max}$, então (KRENK, 1995):

$${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)} = \frac{\delta u_{\max}}{\|\delta u_r^{(k)}\|} {}^1\delta\lambda^{(1)} \quad (13)$$

Uma estratégia adaptativa que pode ser muito útil no emprego da técnica de controle de carga é a determinação automática da variação do parâmetro de carga inicial (${}^1\delta\lambda^{(1)}$) para a definição do valor do parâmetro de carga para a primeira iteração (${}^{t+\Delta t}\lambda^{(1)}$), que consiste em, ao final de cada passo da análise, monitorar o número de iterações requeridas para a convergência (N_{it}) da técnica iterativa e comparar esse número com um



valor ótimo (N_{ot}). Por meio desta monitoração, calcula-se ${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(1)}$ para o passo de carga seguinte por (CRISFIELD, 1991):

$${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(1)} = \sqrt{\frac{N_{ot}}{N_{it}}} {}^1\delta\lambda^{(1)} \sqrt{|GSP|} \quad (14)$$

Na Figura 3 é apresentado o algoritmo implementado referente ao método de Newton - Raphson associado à estratégia GDCM.

- 1) Determinar um valor para o parâmetro de carga inicial ${}^1\delta\lambda^{(1)}$ e fazer ${}^1\lambda^{(0)} = 1$
- 2) Para a primeira iteração ($k = 1$), em qualquer passo $t + \Delta t$:
 - a) Determinar a matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(0)}$.
 - b) Resolver as equações de equilíbrio $\delta\mathbf{u}_r^{(1)} = \mathbf{K}^{(0)-1}\mathbf{F}_r$ e $\delta\mathbf{u}_g^{(1)} = \mathbf{K}^{(0)-1}\mathbf{g}^{(0)}$
 - c) No primeiro incremento, fazer $GSP = 1$. Do segundo incremento em diante utiliza-se a equação:

$$GSP = \frac{{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}$$
 - d) Do segundo passo em diante, usar $\delta\lambda^{(1)} = \sqrt{\frac{N_{ot}}{N_{it}}} {}^1\delta\lambda^{(1)} \sqrt{|GSP|}$.
 - e) Verificar o sinal de GSP. Se $GSP < 0$, multiplicar $\delta\lambda^{(1)}$ por -1 para mudar o sentido de crescimento do parâmetro de carga.
 - f) Calcular o deslocamento $\delta\mathbf{u}^{(1)} = \delta\mathbf{u}_g^{(1)} + \delta\lambda^{(1)}\delta\mathbf{u}_r^{(1)}$.
- 3) Para as próximas iterações ($k \geq 2$) no passo $t + \Delta t$:
 - a) Determinar o vetor das forças $\mathbf{g}^{(k-1)} = \lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i^{(k-1)}$.
 - b) Atualizar a matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(k-1)}$.
 - c) Resolver $\delta\mathbf{u}_g^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)-1}\mathbf{g}^{(k-1)}$ e $\delta\mathbf{u}_r^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)-1}\mathbf{F}_r$.
 - d) Calcular $\delta\lambda^{(k)} = -\frac{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(k)}}$.
 - e) Calcular os deslocamentos $\delta\mathbf{u}^{(k)} = \delta\mathbf{u}_g^{(k)} + \delta\lambda^{(k)}\delta\mathbf{u}_r^{(k)}$.
 - f) Se $\|\delta\mathbf{u}^{(k)}\| > \delta u_{\max}$, então $\delta\lambda^{(k)} = \frac{\delta u_{\max}}{\|\delta\mathbf{u}_r^{(k)}\|} {}^1\delta\lambda^{(1)}$.
- 4) Atualizar o parâmetro de carga total λ e o vetor de deslocamentos totais \mathbf{u} :

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)}$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^{(k)}$$
- 5) Repetir os passos 3) a 4) até que $\|\mathbf{g}^{(k-1)}\| \leq \zeta$.
- 6) Voltar ao passo 2) para o próximo incremento de carga fazendo $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k)} + 1$.

Figura 3 – Algoritmo para o método de solução.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são apresentadas as análises numéricas estáticas de problemas de treliças planas. Em todas as análises estruturais considerou-se a tolerância (ζ) para a verificação da convergência a cada iteração (k) igual a 10^{-5} , o número de iterações desejadas (N_{ot}) igual a 5 e o deslocamento máximo (δu_{\max}) igual a $\|{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}\|$. O peso próprio das estruturas não é considerado nas simulações.

4.1 SIMULAÇÃO 1 - PROBLEMA DE TRELIÇA COM UMA BARRA E MOLA ELÁSTICA

Na Figura 4 é apresentado um desenho esquemático de uma treliça simples constituída por uma barra com comprimento indeformado L_0 e sujeita a uma força concentrada F de tal forma que ocasiona um deslocamento vertical v . À barra é adicionada uma mola elástica linear de rigidez K_s . Considera-se a rigidez axial da barra (EA) igual a $5 \cdot 10^7$ N, e os parâmetros geométricos z e r iguais a 25 mm e 2500 mm, respectivamente. Para as simulações com a estratégia de solução GDCM foi adotado o incremento inicial do parâmetro de força ${}^1\delta\lambda^{(1)}$ igual a 3,1 e o incremento de força igual a $\Delta P = -0,5$ N.



Figura 4 – Treliça plana constituída de uma barra e uma mola.

No Gráfico 1 são apresentados as trajetórias de equilíbrio (deslocamento v versus força F) obtidas com o modelo proposto variando-se a rigidez da mola K_s . Para as curva numéricas obtidas com o valor de $K_s = 1,35$ N/mm, vê-se que a reposta predita pelo modelo proposto se aproxima da obtida no trabalho de Lourenço (1999). Observa-se diferenças nas trajetórias quando varia-se a rigidez da mola. Nas trajetórias obtidas para $K_s = 0$ e $K_s = 0,5$ N/mm surgem dois pontos limites.

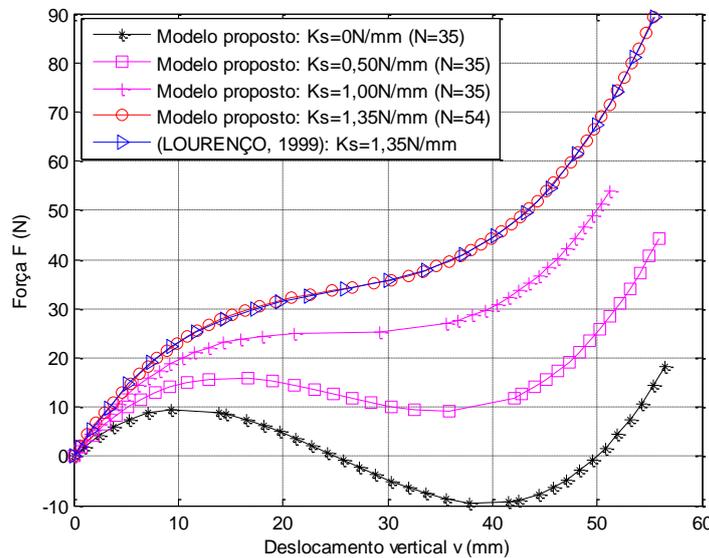


Gráfico 1: Deslocamento vertical no nó 2 versus a força F.

De modo geral, uma configuração de equilíbrio pode ser estável ou instável. Configurações estáveis ocorrem com o aumento da carga e do deslocamento; configurações instáveis podem ocorrer com a diminuição da carga e com o aumento do deslocamento, ou com a diminuição da carga e do deslocamento.

4.2 SIMULAÇÃO 2 - PROBLEMA DE TRELIÇA COM DUAS BARRAS

Considere a treliça plana constituída de duas barras mostrada na Figura 5 sujeita a uma força concentrada P aplicada no nó 2. As propriedades geométricas e materiais da estrutura são consideradas adimensionais. A rigidez axial (EA) é igual a 1000 para as duas barras. Este problema foi estudado por Crisfield (1991) e Muñoz-Rojas e Filho (2001). Para as simulações com a estratégia de solução GDCM foi adotado o incremento inicial do parâmetro de força ${}^1\delta\lambda^{(1)} = 1,5$ e o incremento de força igual a $\Delta P = -2,0$ N.

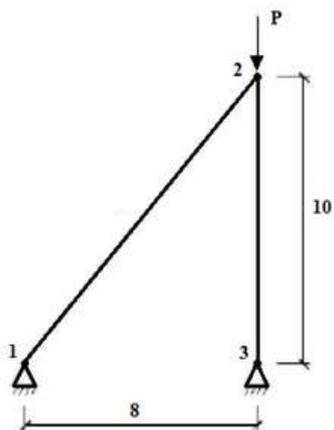


Figura 5 – Trelíça plana constituída de duas barras.

No Gráfico 2 são apresentadas as curvas numéricas deslocamento vertical no nó 2 *versus* força, e no Gráfico 3 aparecem as configurações deformadas (posições de equilíbrio) da trelíça variando-se o número de passos de força (N) - 0, 50, 100 e 132. Observa-se no Gráfico 2 que as trajetórias obtidas pelo modelagem proposta e com o programa ATENAS 2.0 (MUÑOZ-ROJAS; DUARTE FILHO, 2001) ficaram próximas.

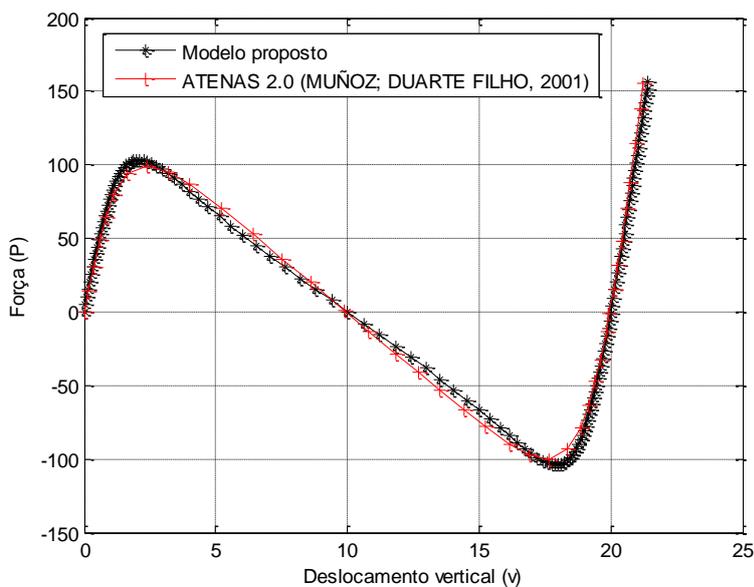


Gráfico 2: Deslocamento vertical no nó 2 *versus* a força P.

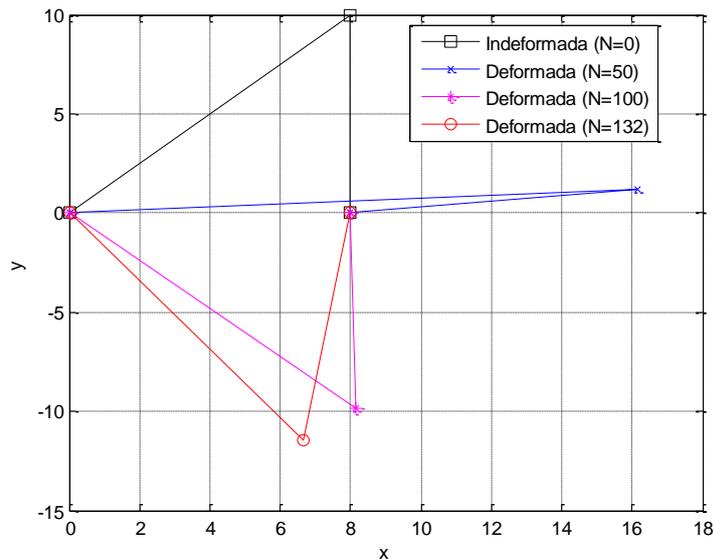


Gráfico 3: Configurações deformadas e indeformada da treliça de duas barras variando-se o número de passos de força (N).

4.3 SIMULAÇÃO 3 - PROBLEMA DE TRELIÇA DO TIPO GRUA

A estrutura consiste de uma treliça do tipo grua cujas barras têm mesmo módulo de elasticidade ($E = 210$ GPa) e mesma área da seção transversal ($A = 0,002$ m²). A treliça está submetida às forças concentradas P_1 e P_2 conforme o desenho esquemático apresentado na Figura 6. Para a estratégia de solução do problema, adota-se o incremento inicial do parâmetro de carga ${}^1\delta\lambda^{(1)} = 10^{-14}$.

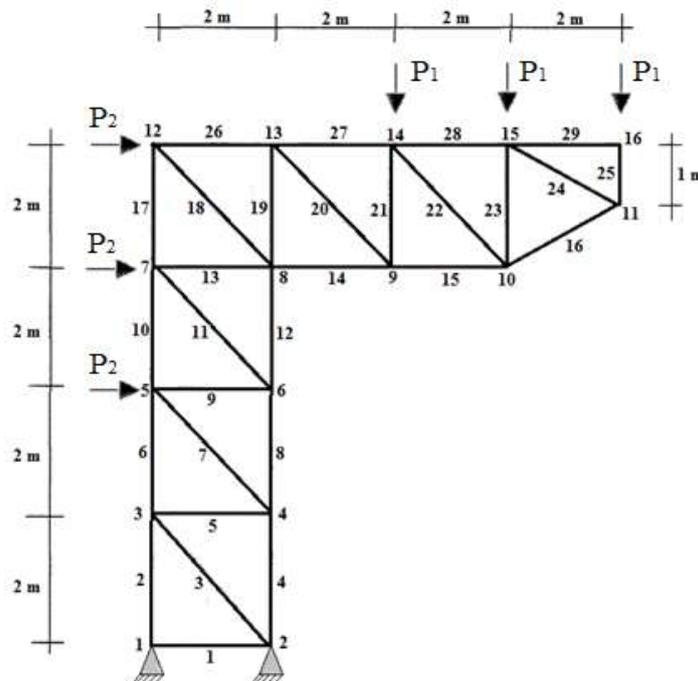


Figura 6 – Esquema estrutural da treliça plana tipo grua.

Na análise considera-se os incrementos de força $\Delta P_1 = 2$ kN e $\Delta P_2 = 1$ kN. No Gráfico 4 é apresentada a evolução do deslocamento vertical no nó 11 da malha *versus* a força P_1 . Vê-se que a trajetória de equilíbrio obtida com o modelo implementado ficou bastante próxima às obtidas pelo programa computacional desenvolvido por Segnini (2000) e pelo programa Ansys (SEGNINI, 2000).

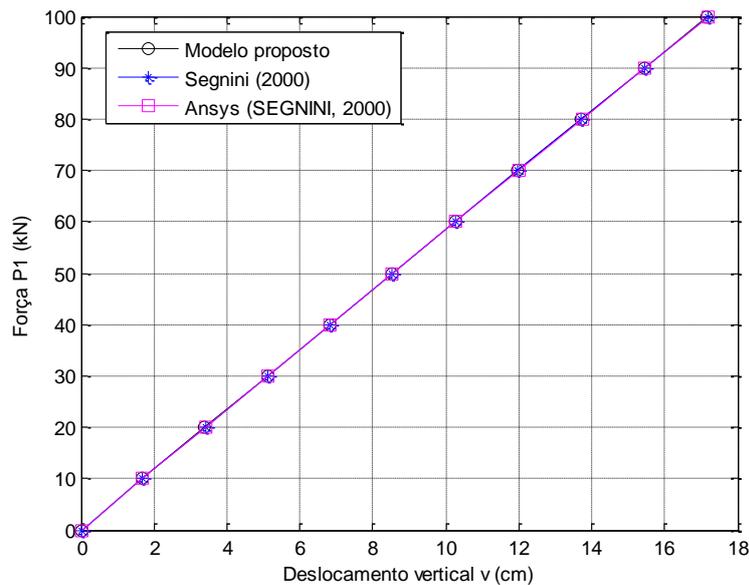


Gráfico 4: Curvas numéricas deslocamento vertical no nó 11 *versus* força P1.

5 CONCLUSÃO

A segurança e economia são atualmente dois dos fatores que mais contribuem para favorecer a análise não linear de estruturas. O emprego em simultâneo de estruturas de vãos cada vez maiores e de materiais cada vez mais resistentes conduz a estruturas cada vez mais sensíveis à instabilidade.

Embora, muitas vezes, a resposta da análise de uma estrutura antes de se alcançar pontos críticos seja suficiente para os propósitos de projeto, a determinação da resposta no intervalo pós-crítico é essencial quando se deseja estudar o comportamento da estrutura no domínio de grandes deslocamentos.

O programa desenvolvido com o auxílio do Scilab mostrou-se eficiente devido à simplicidade da implementação computacional e ao razoável desempenho nos exemplos numéricos estudados, demonstrando, assim, potencialidade na sua aplicação em análises não lineares geométricas de treliças.

Evidencia-se a necessidade da utilização de um método incremental-iterativo para a solução adequada de problemas não lineares geométricos. A técnica de Controle de Deslocamento Generalizado mostrou-se eficiente na obtenção das trajetórias de equilíbrio com pontos limites. O parâmetro geral de rigidez (GSP) utilizado para a verificação da mudança do sinal do incremento de força na passagem por pontos limites forneceu resultados com razoável precisão nos exemplos estudados.

Uma natural continuação desta pesquisa consiste em estendê-lo para outras áreas da análise não linear, como estruturas com não linearidade material e análise dinâmica não linear. A otimização não linear do *layout* de treliças é também outra área pela qual poderia ser aplicado a formulação implementada.

REFERÊNCIAS

CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Vol. 1. Essentials, Chichester, John Wiley & Sons, Inc., 1991.

KRENK, S. An orthogonal residual procedure for non-linear finite element equations. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, v. 38, p. 823-839, 1995.

KRIPKA, M.; PRAVIA, Z. M. C.; DIAS, M. M.; MEDEIROS G. F. Minimização do peso de treliças de alumínio pela otimização simultânea da seção transversal dos elementos e da geometria: análise numérica e validação experimental. **Revista Eletrônica de Engenharia Civil - REEC**, v. 7, n. 2, p. 19-26, 2013.

LEITE, F. N. **Uma formulação teórica consistente para análise não linear de estruturas treliçadas espaciais**. Dissertação (Mestrado), Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2000.

LOURENÇO, P. B. **Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não linear**. Relatório 99-DEC/E-1, Departamento de Engenharia Civil Universidade do Minho, 1999.



MUÑOZ, P. A. R.; DUARTE FILHO, L. A. **CE-60: ATENAS - Análise não linear geométrica e material de treliças espaciais.** 2001.

PAULA, C. F. **Contribuição ao estudo das respostas numéricas não lineares estática e dinâmica de estruturas reticuladas planas.** Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

RODRIGUES, P. F. N.; VARELA, W. D.; SOUZA, R. A. Análise de estratégias de solução do problema não linear. **Revista de Ciência & Tecnologia**, v. 8, n. 2, p. 36-48, 2008.

SEGNINI, S. C. A. **Estudo comparativo de formulações para a análise não linear geométrica de treliças.** Mestrado (Dissertação), Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2000.

YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points. **AIAA Journal**, v. 28, n. 12, p. 2110-2116, 1990.