



## MODELAGEM DE VIGAS POR ELEMENTOS FINITOS CONSIDERANDO A MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO

Luiz Antonio Farani de Souza<sup>1</sup>

**RESUMO:** A análise linear elástica é ainda muito utilizada devido à simplicidade de aplicação e ao fato de que o seu conhecimento já se encontra consolidado. No entanto, uma das dificuldades da análise linear é sua inaptidão em refletir o real comportamento de estruturas menos comuns sob condições de carregamentos próximas ao colapso. Há uma tendência crescente das normas atuais de se incorporar, direta ou indiretamente, os efeitos das não linearidades nos projetos estruturais. Com o avanço tecnológico, o grau de segurança obtido e o baixo custo de pesquisas computacionais comparado com ensaios experimentais vêm possibilitando cada vez mais a aplicação de técnicas numéricas na solução não linear de problemas de estruturas. Os modelos constitutivos de dano têm sido usados como uma importante ferramenta de análise da perda de rigidez de estruturas com a finalidade de prever a degradação do material. Fisicamente, o dano pode ser visto como as deformações plásticas ou deformações permanentes originadas pela deterioração das propriedades físicas do material. Na engenharia de estruturas é de extrema importância conhecer o início, a propagação e as causas do dano para controlá-lo, estimando assim a vida útil e evitando o colapso da estrutura. Neste artigo é apresentada uma metodologia para a análise não linear de vigas, por meio do Método dos Elementos Finitos, levando em consideração o efeito da não linearidade física. O material é descrito por um modelo constitutivo fundamentado na teoria da Mecânica do Dano Contínuo. As análises não lineares estáticas são efetuadas considerando o método de Newton - Raphson associado à técnica de continuação Controle de Deslocamento Generalizado. Na obtenção do vetor de força interna e da matriz de rigidez elementar, o módulo de rigidez à flexão equivalente é obtido com a divisão da seção transversal em camadas. Problemas de vigas encontrados na literatura são analisados com o intuito de comprovar a eficiência do código computacional implementado, quanto à obtenção da trajetória de equilíbrio (força de colapso) e à distribuição do dano nas seções transversais localizadas em pontos dos elementos finitos da malha ao longo do comprimento da viga.

**PALAVRAS-CHAVE:** Elementos Finitos; Mecânica do Dano; não linearidade física; viga.

### 1 INTRODUÇÃO

Na análise estrutural muitos problemas são caracterizados pelo comportamento inelástico dos materiais que conformam as estruturas, identificando fenômenos tais como plasticidade, dano, fraturamento, entre outros, os quais mudam substancialmente as propriedades de rigidez do sistema. Um problema complexo gerado pela inelasticidade dos materiais é a ocorrência de deformações localizadas no sistema. A consideração desse fenômeno pode levar a problemas na implementação numérica, acontecendo inclusive a interrupção da análise por problemas de convergência ou mal condicionamento numérico. Nesse contexto, a análise numérica de estruturas com características inelásticas de material requer controles de análise que permitam avaliar as mudanças de rigidez do sistema ocasionadas pelo comportamento não linear dos materiais (MUÑOZ.; ROEHL, 2012).

Com o avanço do conhecimento do comportamento dos materiais e das técnicas de cálculo, além do desenvolvimento de computadores cada vez mais eficientes, torna-se possível a consideração de mecanismos de comportamento das estruturas por meio de modelos matemáticos mais realísticos. A tentativa de aproximação desse modelos à realidade do comportamento estrutural tem a vantagem de ser possível determinar respostas mais precisas, contudo apresenta o inconveniente do número excessivo de parâmetros, identificação paramétrica complexa com necessidade de ensaios experimentais elaborados e de processamento numérico - computacional elevados (PITUBA; DELALIBERA, 2010).

A Mecânica do Dano Contínuo (MDC) é uma ferramenta para a análise da deterioração do material em sólidos submetidos à ação de natureza mecânica ou térmica. Enquanto a Mecânica da Fratura lida com as condições de propagação de fissuras macroscópicas, a MDC estuda o efeito de microfissuras distribuídas na resposta do material. Os modelos constitutivos formulados pela aplicação dos conceitos da MDC permitem considerar as perdas de rigidez e resistência, observadas em diferentes materiais, como resultado do processo evolutivo de microfissuração. Essa teoria pretende descrever a evolução dos fenômenos dessas perdas que se desenvolvem entre um estado inicial, relativo a uma situação de material íntegro, e um estado final, correspondente à ruptura do elemento de volume. Para tanto, fundamenta-se nos princípios, e métodos, da mecânica dos meios contínuos e da termodinâmica dos processos irreversíveis (PROENÇA, 1992).

<sup>1</sup> Professor Dr. do Curso de Engenharia Civil da UTFPR, campus Apucarana - Pr. lasouza@utfpr.edu.br



A variável dano não é uma grandeza física mensurável diretamente mas, para fins da modelagem matemática, é possível relacioná-la à redução progressiva de características mecânicas globais como, por exemplo, o módulo de elasticidade. Assim sendo, uma variável interna representativa do estado de deterioração do material é definida de modo a permitir, quantificar e distinguir, macroscopicamente, um elemento de volume deteriorado de um outro íntegro.

Este artigo apresenta uma metodologia para a análise não linear de vigas, por meio do Método dos Elementos Finitos, levando em consideração o efeito da não linearidade física. O material é descrito por um modelo constitutivo fundamentado na teoria da Mecânica do Dano Contínuo proposto por Manzoli (1998), com a possibilidade de prever o comportamento diferenciado tanto à tração quanto à compressão. As análises não lineares estáticas são efetuadas considerando o método de Newton - Raphson associado à técnica de continuação Controle de Deslocamento Generalizado. Na obtenção do vetor de força interna e da matriz de rigidez elementar, o módulo de rigidez à flexão equivalente é obtido a partir da determinação do dano em cada camada de divisão das seção transversais localizadas nos pontos de Gauss na integração numérica. Problemas de estruturas de vigas encontrados na literatura são analisados com o intuito de comprovar a eficiência do código computacional implementado, quanto à obtenção da trajetória de equilíbrio (força de colapso) e à distribuição do dano nas seções transversais localizadas em pontos dos elementos finitos da malha ao longo do comprimento da viga. As simulações computacionais são realizadas com o programa gratuito Scilab.

## 2 MODELO CONSTITUTIVO PARA O MATERIAL DA VIGA

Para descrever o comportamento do material, utiliza-se um modelo baseado na Mecânica do Dano Contínuo proposto por Manzoli (1998). Para o caso de um elemento unidimensional submetido a uma força axial, a tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  é expressada por:

$$\bar{\sigma} = E_0 \varepsilon \tag{1}$$

O limite de dano inicial  $r_0$  é uma propriedade do material e pode ser relacionado à tensão limite de proporcionalidade  $f_0$  da seguinte forma:

$$r_0 = B_1 \frac{f_0}{\sqrt{E_0}} \tag{2}$$

onde  $B_1$  é um parâmetro do modelo. Define-se a norma da tensão efetiva  $\tau(\bar{\sigma})$  por:

$$\tau(\bar{\sigma}) = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}^2}{E_0}} \tag{3}$$

A partir das relações de Kuhn - Tucker, o limite de dano é dado pelo máximo valor da variável  $r$  durante o processo de carregamento, tal que:

$$r = \max(r_0, \tau) \tag{4}$$

A partir das Equações (1) e (3),  $r$  pode ser expresso em termos da deformação específica  $\varepsilon$  por:

$$\tau(\varepsilon) = \sqrt{E_0} \varepsilon \tag{5}$$

A variável de dano  $d$  é escrita em função do módulo  $H$  e do limite de dano  $r$  por:

$$d = \frac{r - r_0}{r(1 + H)} \tag{6}$$

Variando-se a função que descreve o módulo  $H$ , tem-se na Figura 1 em: (a) o regime elastodegradável perfeito (perfeitamente plástico); em (b) o encruamento linear positivo (endurecimento); em (c) o encruamento linear negativo (abrandamento); e em (d) o abrandamento exponencial.

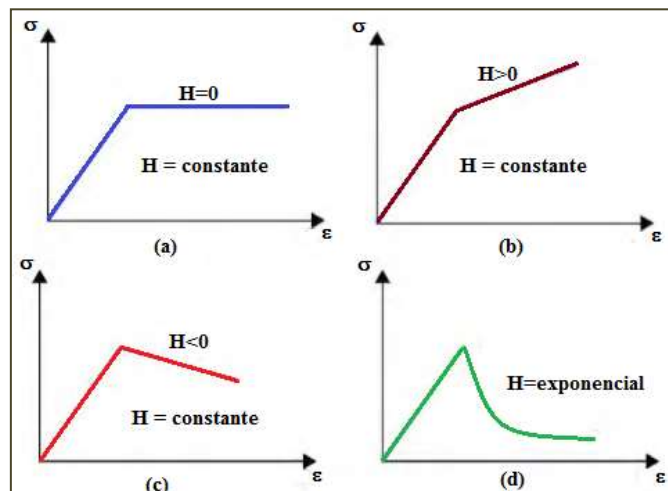




Figura 1 – Comportamentos distintos de endurecimento/abrandamento.

Para o caso de um procedimento incremental, o dano  $d$  no passo de carga  $t+\Delta t$  pode ser obtido a partir da deformação específica ( $\varepsilon$ ) em cada camada de divisão da seção transversal da viga (no ponto de Gauss correspondente na integração numérica), a cada iteração  $k$ , por meio do algoritmo do modelo constitutivo de dano diferenciado à tração e à compressão apresentado na Figura 2. No algoritmo, os limites de dano inicial  $r_{0c}$  e  $r_{0t}$  são referentes à compressão e à tração, respectivamente, e os módulos  $H_c$  e  $H_t$  referem-se à compressão e à tração, respectivamente.

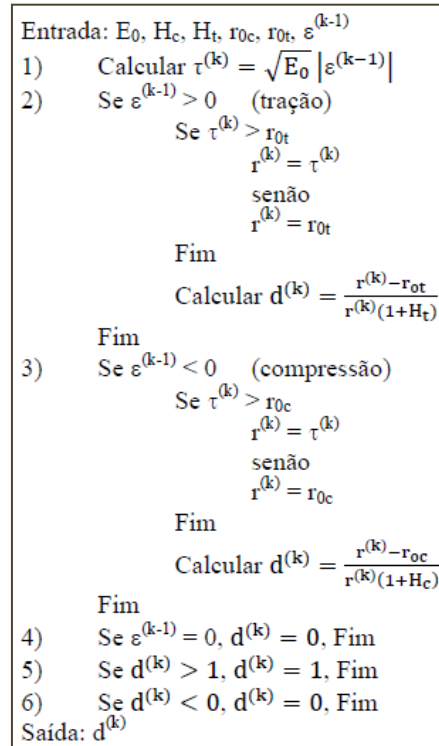


Figura 2 – Algoritmo para o modelo de dano diferenciado à tração e à compressão.

### 3 MÓDULO DE RIGIDEZ À FLEXÃO EQUIVALENTE

Para a determinação do módulo de rigidez à flexão equivalente, a seção transversal da viga é dividida em  $n_c$  camadas de mesma espessura. O momento de inércia da camada  $i$  ( $I_i$ ) é calculado, de acordo com o Teorema do Eixo Paralelo, por:

$$I_i = \frac{b(y_i - y_{i-1})^3}{12} + b(y_i - y_{i-1}) \left( y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{2} \right)^2, \quad i = 1, \dots, n_c \quad (7)$$

onde  $n_c$  é o número total de camadas,  $b$  é a largura da seção transversal retangular, e  $y_i$  é a coordenada da  $i$ -ésima camada a partir do centro geométrico da seção. A rigidez à flexão equivalente  $EI_{eq}$  é calculada por:

$$EI_{eq} = \sum_{i=1}^{n_c} E_i I_i \quad (8)$$

onde  $E_i = E_{0i}(1-d_i)$  é o módulo de elasticidade longitudinal do material danificado da  $i$ -ésima camada.

Na obtenção do vetor de força interna e da matriz de rigidez elementar, o módulo de rigidez à flexão equivalente é avaliado em cada ponto de Gauss na integração numérica (método de Quadratura Gaussiana). No procedimento de cálculo desse módulo, supõe-se por simplificação que a linha neutra está localizada no centróide da seção transversal; no entanto, essa condição é válida desde que o material apresente mesmo comportamento constitutivo tanto à tração quanto à compressão.

### 4 MÉTODO DE SOLUÇÃO

Algoritmos existentes de métodos de solução apresentam como passo fundamental a avaliação do vetor de carga residual  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{g}^{(k-1)}$ , e uma nova estimativa para os deslocamentos é obtida por meio do sistema de equações:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{g}^{(k-1)} = {}^{t+\Delta t} \lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}_i^{(k-1)} \quad (9)$$



onde  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(k-1)}$  é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural,  $\delta\mathbf{u}^{(k)}$  é o vetor de deslocamentos residuais,  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}_i^{(k-1)}$  é o vetor de forças internas, e  ${}^{t+\Delta t}\lambda^{(k-1)}$  é o parâmetro de carga total. No sistema de equações dado em (9) o superíndice direito refere-se à iteração e o superíndice esquerdo ao passo de incremento de carga. Para a determinação do parâmetro de carga iterativo utiliza-se a estratégia Controle de Deslocamento Generalizado (GDCM). O parâmetro de carga total  $\lambda$  e o vetor de deslocamentos totais  $\mathbf{u}$  são obtidos pelas seguintes equações no passo  $t+\Delta t$  e na iteração  $k$ , respectivamente:

$${}^{t+\Delta t}\lambda^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\lambda^{(k-1)} + {}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)} \quad (10)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(k-1)} + {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}^{(k)} \quad (11)$$

A técnica GDCM foi apresentada por Yang e Shieh (1990) e consiste na utilização de um parâmetro geral de rigidez (GSP), que é definido pela seguinte equação (RODRIGUES et al., 2008):

$$GSP = \frac{{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(1)}} \quad (12)$$

onde  ${}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}$  é o vetor de deslocamentos da primeira iteração referente ao primeiro passo de carga. O parâmetro do incremento de carga  ${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)}$  é calculado por:

$${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)} = - \frac{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(k)}} \quad (13)$$

O sinal do incremento inicial de carga ( ${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(1)}$ ) pode ser positivo ou negativo. A escolha do sinal correto é de suma importância na definição de sequências de soluções que permitam o avanço na resposta carga - deslocamento. O parâmetro de rigidez generalizado (GSP) depende exclusivamente dos vetores  ${}^t\delta\mathbf{u}_r$  (passo de carga anterior) e  ${}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r$  (passo de carga corrente). A mudança de sinal do parâmetro GSP serve como um indicador para a mudança do sentido de crescimento da carga, uma vez que o mesmo torna-se negativo somente nos incrementos da carga imediatamente após a passagem por pontos limites.

Há possibilidade de que o deslocamento tangente tenda ao infinito em pontos próximos a um ponto limite da trajetória de equilíbrio. Para evitar que isso ocorra, limitou-se este deslocamento a um valor máximo  $\delta u_{\max}$ , de forma que se  $\|\delta\mathbf{u}\| > \delta u_{\max}$ , então (KRENK, 1995):

$${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(k)} = \frac{\delta u_{\max}}{\|\delta\mathbf{u}_r^{(k)}\|} {}^1\delta\lambda^{(1)} \quad (14)$$

Uma estratégia adaptativa que pode ser muito útil no emprego da técnica de controle de carga é a determinação automática da variação do parâmetro de carga inicial ( ${}^1\delta\lambda^{(1)}$ ) para a definição do valor do parâmetro de carga para a primeira iteração ( ${}^{t+\Delta t}\lambda^{(1)}$ ), que consiste em, ao final de cada passo da análise, monitorar o número de iterações requeridas para a convergência ( $N_{it}$ ) da técnica iterativa e comparar esse número com um valor ótimo ( $N_{ot}$ ). Por meio desta monitoração, calcula-se  ${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(1)}$  para o passo de carga seguinte por (CRISFIELD, 1991):

$${}^{t+\Delta t}\delta\lambda^{(1)} = \sqrt{\frac{N_{ot}}{N_{it}}} {}^1\delta\lambda^{(1)} \sqrt{|GSP|} \quad (15)$$

Na Figura 3 é apresentado o algoritmo implementado referente ao método de Newton - Raphson associado à estratégia GDCM.



- 1) Determinar um valor para o parâmetro de carga inicial  ${}^1\delta\lambda^{(1)}$  e fazer  ${}^1\lambda^{(0)} = 1$
- 2) Para a primeira iteração ( $k = 1$ ), em qualquer passo  $t + \Delta t$ :
  - a) Determinar a matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(0)}$ .
  - b) Resolver as equações de equilíbrio  $\delta\mathbf{u}_r^{(1)} = \mathbf{K}^{(0)^{-1}}\mathbf{F}_r$  e  $\delta\mathbf{u}_g^{(1)} = \mathbf{K}^{(0)^{-1}}\mathbf{g}^{(0)}$
  - c) No primeiro incremento, fazer  $GSP = 1$ . Do segundo incremento em diante utiliza-se a equação:
 
$$GSP = \frac{{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(1)}}$$
  - d) Do segundo passo em diante, usar  $\delta\lambda^{(1)} = \sqrt{\frac{N_{ot}}{N_{it}}} {}^1\delta\lambda^{(1)} \sqrt{|GSP|}$ .
  - e) Verificar o sinal de  $GSP$ . Se  $GSP < 0$ , multiplicar  $\delta\lambda^{(1)}$  por  $-1$  para mudar o sentido de crescimento do parâmetro de carga.
  - f) Calcular o deslocamento  $\delta\mathbf{u}^{(1)} = \delta\mathbf{u}_g^{(1)} + \delta\lambda^{(1)}\delta\mathbf{u}_r^{(1)}$ .
- 3) Para as próximas iterações ( $k \geq 2$ ) no passo  $t + \Delta t$ :
  - a) Determinar o vetor das forças  $\mathbf{g}^{(k-1)} = \lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r - \mathbf{F}_i^{(k-1)}$ .
  - b) Atualizar a matriz de rigidez  $\mathbf{K}^{(k-1)}$ .
  - c) Resolver  $\delta\mathbf{u}_g^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)^{-1}}\mathbf{g}^{(k-1)}$  e  $\delta\mathbf{u}_r^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)^{-1}}\mathbf{F}_r$ .
  - d) Calcular  $\delta\lambda^{(k)} = -\frac{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{{}^t\delta\mathbf{u}_r^{(1)T} {}^{t+\Delta t}\delta\mathbf{u}_r^{(k)}}$ .
  - e) Calcular os deslocamentos  $\delta\mathbf{u}^{(k)} = \delta\mathbf{u}_g^{(k)} + \delta\lambda^{(k)}\delta\mathbf{u}_r^{(k)}$ .
  - f) Se  $\|\delta\mathbf{u}^{(k)}\| > \delta u_{\max}$ , então  $\delta\lambda^{(k)} = \frac{\delta u_{\max}}{\|\delta\mathbf{u}_r^{(k)}\|} {}^1\delta\lambda^{(1)}$ .
- 4) Atualizar o parâmetro de carga total  $\lambda$  e o vetor de deslocamentos totais  $\mathbf{u}$ :
 
$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)}$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^{(k)}$$
- 5) Repetir os passos 3) a 4) até que  $\|\mathbf{g}^{(k-1)}\| \leq \zeta$ .
- 6) Voltar ao passo 2) para o próximo incremento de carga fazendo  $\lambda^{(k)} = \lambda^{(k)} + 1$ .

Figura 3 – Algoritmo para o método de solução.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos de problemas de vigas hiperestáticas encontrados na literatura levando-se em conta na análise estática a não linearidade física. Na discretização das estruturas, a malha é constituída por 20 elementos finitos de pórtico de dois nós. Em todas as análises estruturais, considerou-se a tolerância ( $\square$ ) para a verificação da convergência a cada iteração ( $k$ ) igual a  $10^{-5}$ , o número de iterações desejadas ( $N_{ot}$ ) igual a 5, e o deslocamento máximo ( $\delta u_{\max}$ ) igual a  $\|{}^1\delta\mathbf{u}_r^{(1)}\|$ . Em todos os problemas é desprezado o peso próprio da estrutura.

### 5.1 SIMULAÇÃO NUMÉRICA 1 - VIGA BIENGASTADA

Seja o problema de viga biengastada, mostrada na Figura 4, de comprimento  $L = 5,0$  m e seção transversal retangular ( $0,30 \times 0,60$ )  $m^2$ , cujo material é o aço macio com o comportamento elastodegradável perfeito (Figura 1a). A viga está sujeita a uma força concentrada vertical  $P$  aplicada no meio vão. Este problema foi estudado por Lourenço (1999).

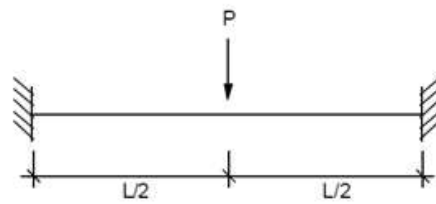


Figura 4 – Esquema estático da viga biengastada.

Na Tabela 1 são apresentados os parâmetros materiais do Modelo de Dano e os utilizados na estratégia de solução GDCM. No Gráfico 1 aparecem as curvas numéricas deslocamento vertical máximo *versus* força, variando-se o número de camadas da seção transversal da viga ( $nc$ ).

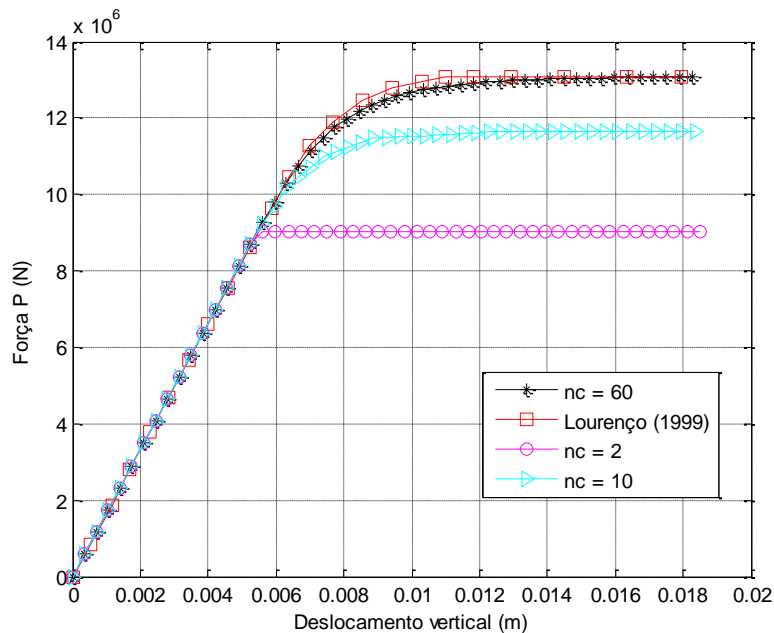


Gráfico 1: Deslocamento vertical máximo *versus* força P variando-se no número de camadas ( $nc$ ).

Tabela 1: Parâmetros do Modelo de Dano e do método de solução GDCM.

Modelo de Dano	GDCM
$E_0 = 200 \text{ GPa}$ $f_{0c} = f_{0t} = 300 \text{ MPa}$ $H_c = H_t = 0$ $B_1 = 1$	$\Delta P = 0,58 \text{ MN}$ $\delta\lambda^{(1)} = 10^{-14}$

Vê-se no Gráfico 1 que, com o aumento do número de camadas de divisão da seção transversal da viga, a curva numérica predita pelo modelo implementado se aproxima da curva numérica obtida por Lourenço (1999). O valor da força limite de elasticidade obtido na simulação é igual a 8,700000 MN (o valor teórico é igual a 8,64 MN), e corresponde ao momento em que as fibras mais afastadas em relação ao eixo neutro da seção atingem a tensão de escoamento tanto na compressão quanto na tração. O valor da força de colapso ( $P_{lim}$ ) obtido é de 13,085307 MN com uma diferença de 0,9668 % (erro relativo percentual) em relação ao valor teórico de 12,96 MN.

## 5.2 SIMULAÇÃO NUMÉRICA 2 - VIGA ENGASTADA - APOIADA

Seja a viga engastada - apoiada indicada na Figura 5, de seção retangular e comprimento  $L = 10 \text{ m}$ , submetida a uma força concentrada  $P$  no meio do vão, e para a qual deseja-se o valor da força de colapso ( $P_{lim}$ ).



Considere-se ainda que a viga seja constituída por um material que apresenta um comportamento elastodegradável perfeito, conforme o diagrama tensão x deformação esquemático apresentado na Figura 1a. Esta estrutura foi estudada por Santos (2003).

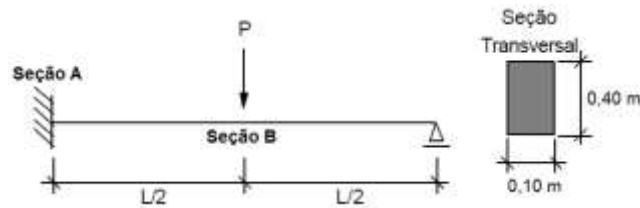


Figura 5 – Esquema estático da viga engastada - apoiada.

A seção transversal da viga foi dividida em 64 camadas de mesma espessura. Na Tabela 2 são apresentados os parâmetros do Modelo de Dano e do método de solução GDCM. A trajetória de equilíbrio (deslocamento vertical no centro do vão *versus* força) é apresentada no Gráfico 2.

Tabela 2: Parâmetros do Modelo de Dano e do método de solução GDCM.

Modelo de Dano	GDCM
$E_0 = 205 \text{ GPa}$ $f_{0c} = f_{0t} = 250 \text{ MPa}$ $H_c = H_t = 0$ $B_1 = 1$	$\Delta P = 100 \text{ kN}$ $\delta\lambda^{(1)} = 10^{-14}$

No modelo constitutivo, considera-se que a camada da seção transversal escoou quando a variável dano assume valor maior que zero ( $d > 0$ ). A simulação é conduzida até o escoamento de todas as camadas da seção transversal localizada no ponto de Gauss do elemento finito mais próximo do nó onde está aplicada a força P. A força limite teórica (colapso da estrutura) é calculada pela seguinte equação:

$$P_{lim} = \frac{3bh^2}{2L} f_0 \tag{16}$$

onde b é a base da seção, h é a altura da seção, e L é o comprimento da viga.

A partir da Eq. (16), obtém-se o valor da força limite igual a 600,00 kN. Vê-se no Gráfico 2 que o valor numérico da força limite (599,6552477898455 kN) ficou bastante próximo do valor teórico (erro relativo percentual de 0,0574587%).

A distribuição do dano no final da simulação nas camadas das seções transversais (localizadas nos pontos de Gauss de cada elemento finito) ao longo do comprimento da viga pode ser vista na Figura 6. Observa-se nessa figura as camadas das seções transversais da viga que iniciaram o escoamento ( $d > 0$ , conforme a legenda), destacando-se as regiões mais danificadas próximas ao engaste e ao ponto de aplicação da força.

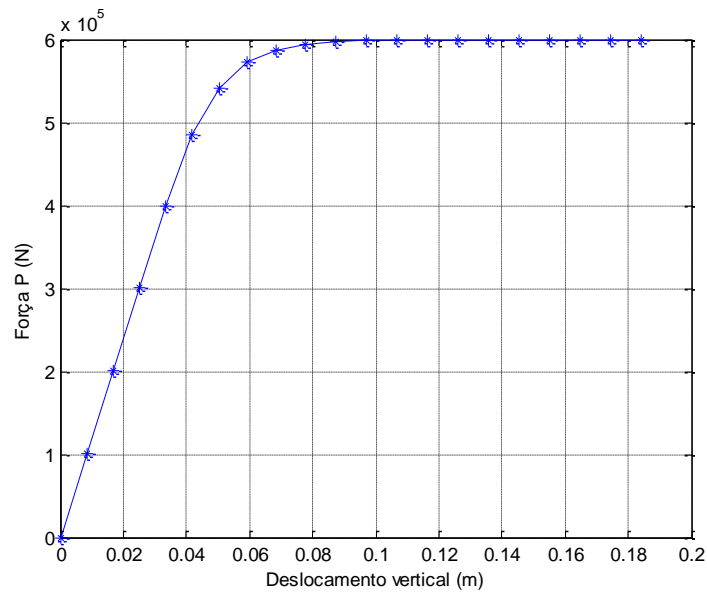


Gráfico 2: Deslocamento vertical no centro do vão versus força P.

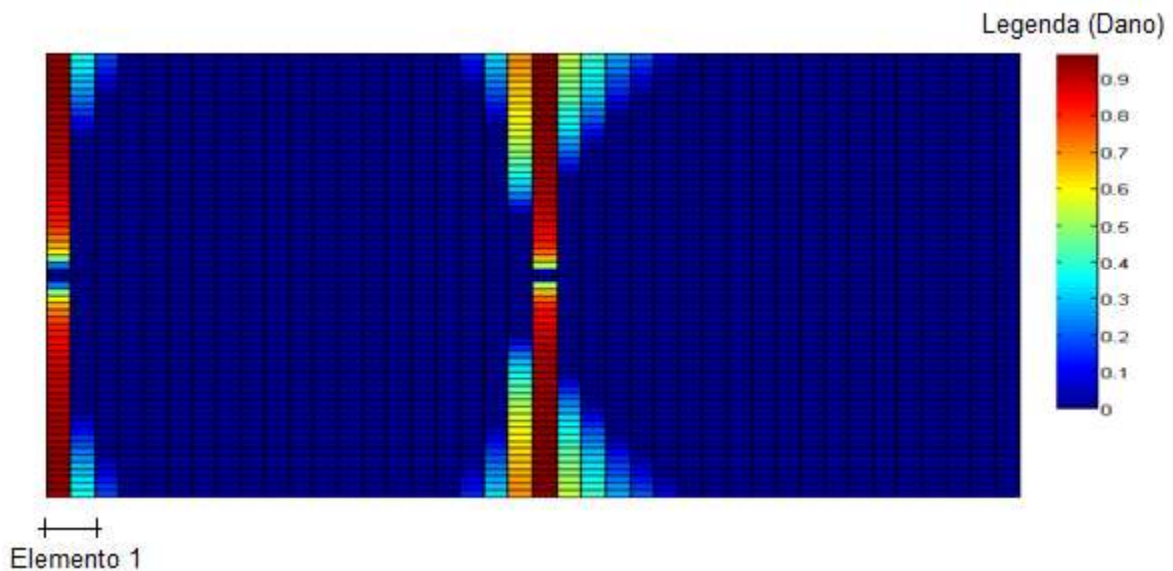


Figura 6 – Distribuição do dano nas camadas das seções transversais ao longo do comprimento da viga.

## 6 CONCLUSÃO

A partir das simulações computacionais realizadas dos problemas de vigas, a modelagem proposta, utilizando o Método dos Elementos Finitos e o modelo constitutivo baseado na Mecânica do Dano Contínuo, apresentou razoável performance quanto à obtenção da trajetória de equilíbrio (força de colapso) em comparação com os resultados disponíveis na literatura.

No segundo problema, o modelo numérico produziu um mapa da distribuição do dano nas camadas das seções transversais em pontos ao longo do comprimento da viga (localizadas nos pontos de Gauss de cada elemento finito), evidenciando a formação de fissuras nas regiões mais solicitadas da estrutura. Em geral, modelos discretos necessitam de técnicas sofisticadas e onerosas computacionalmente de reconstrução da malha para capturar a propagação de fissuras ao longo do processo de carregamento. Assim, essa metodologia apresenta a vantagem de não requerer o uso de técnicas de reconstrução da malha de elementos finitos.

Uma barreira no uso corrente de modelos não lineares está relacionada aos problemas numéricos e instabilidades na convergência que podem surgir em virtude de diversos refinamentos de modelo. Isso ocorre por conta da calibração dos parâmetros necessários nos modelos não lineares, sendo oneroso o processo, visto que diversas análises preliminares devem ser feitas antes de realizar o estudo final da estrutura.





Evidencia-se a necessidade da utilização de um método incremental-iterativo para a solução adequada de problemas com não linearidade física. A técnica de controle de deslocamento generalizado (GDCM) mostrou-se eficiente na obtenção das trajetórias de equilíbrio.

Como pesquisa futura, sugere-se a análise estrutural de vigas de concreto armado reforçadas à flexão com lâminas de PRFC, acrescentado na determinação da rigidez à flexão equivalente as rigidezes das armaduras longitudinais e o reforço. Além disso, a modelagem proposta pode ser estendida para a análise de estruturas do tipo pórtico plano, levando-se também em conta o efeito da não linearidade geométrica.

## REFERÊNCIAS

CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Vol. 1. Essentials, Chichester, John Wiley & Sons, Inc., 1991.

KRENK, S. An orthogonal residual procedure for non-linear finite element equations. **Int. J. Numer. Methods Eng.**, v. 38, p. 823-839, 1995

LOURENÇO, P. B. **Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não linear**. Relatório 99-DEC/E-1, Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho, 1999.

MANZOLI, O. L. **Um modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes en la mecánica de sólidos**. Tese (Doutorado), Escola Técnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1998.

MUÑOZ, L. F. P.; ROEHL, D. M. Comparação de Métodos de Continuação em Problemas com Análise Inelástica. In: Congresso Argentino de Mecânica Computacional, 2012, Salta. **Anais...** Salta: AMCA, v. XXXI, 2012.

PITUBA, J. J. C.; DELALIBERA, R. G. Contribuição para a estimativa de deslocamentos em vigas de concreto armado. In: Mecânica Computacional, v. XXIX, Buenos Aires, 2010, Buenos Aires. **Anais...** Buenos Aires: Eduardo Dvorkin, Marcela Goldschmit, Mario Storti (Eds.), 2010.

PROENÇA, S. P. B. Simulação numérica do comportamento de elementos estruturais em concreto e argamassa armada pelo emprego de um modelo de dano. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 8, n. 4, p. 351-360, 1992.

RODRIGUES, P. F. N.; VARELA, W. D.; SOUZA, R. A. Análise de estratégias de solução do problema não linear. **Revista de Ciência & Tecnologia**, v. 8, n. 2, p. 36-48, 2008.

SANTOS, F. D. **Análise limite e projeto ótimo de vigas em concreto armado**. Dissertação (Mestrado), Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. Solution Method for Nonlinear Problems with Multiple Critical Points. **AIAA Journal**, v. 28, n. 12, p. 2110-2116, 1990.