



## SIMULAÇÃO DE VIBRAÇÕES LONGITUDINAIS EM VIGAS ENGASTADAS UTILIZANDO O MODELLUS

Mauro José Valcanaia Junior<sup>1</sup>, Emerson Mario Boldo<sup>2</sup>

**RESUMO:** As simulações computadorizadas podem tornar o ensino das disciplinas de Física nos cursos de Engenharia mais intuitivo e o aprendizado muito mais fácil. Os modelos virtuais proporcionam uma forma alternativa de ensino, que se mostra eficiente, uma vez que o estudante participa ativamente da simulação, podendo avaliar e criticar os resultados, ao invés de ficar preso às formas tradicionais de resolução de problemas. O Modellus é um software livre que permite simulações de matemática, física, química entre outras. O programa é de fácil manuseio e focado nos resultados e na representação gráfica do experimento. Esse trabalho visa o estudo teórico dos modos de vibração longitudinais de vigas uni-engastadas, caracterizadas por uma vibração livre e não amortecida. Verificou-se que as frequências naturais de oscilação são de características exclusivas da estrutura e independentes de esforços externos. Com o modelo teórico pronto, a simulação computadorizada foi realizada no Modellus. O trabalho espera incentivar o uso de simulações computadorizadas nas salas de aula visando auxiliar a transmissão de conhecimento desse tipo de fenômeno aos alunos de engenharia.

**PALAVRAS-CHAVE:** dinâmica não linear, Modellus, vigas.

### 1 INTRODUÇÃO

A questão da utilização de novas tecnologias no contexto educacional tem sido discutida tanto em nível nacional como internacional, visando desenvolvimento de técnicas pedagógicas que busquem facilitar o ensino e aprendizagem (ARAÚJO et al., 2004). O modelo pedagógico vigente no país, ainda segue os padrões do instrucionismo focado principalmente no conhecimento homogêneo e padronizado (NETO et al., 2012). Dentro desta metodologia o professor transmite o máximo de informações incluídas num engessado currículo pré-estabelecido e o aluno recebe de forma passiva esta grande quantidade de instruções, sem participar ativamente do processo (MANZINI, 2012).

O computador pode ser um auxiliar no aprendizado, sendo um complemento aos livros didáticos, acrescentando uma visão prática do que está sendo estudado. Uma forma de estimular o aprendizado do conteúdo exposto em sala de aula é com as simulações e modelagens computacionais. Essas experiências virtuais permitem uma interatividade entre conteúdo e estudante, deixando o professor livre para escolher a forma de ensino adequada (MEDEIROS, 2002). Com esse método de ensino, fica fácil para o aluno ter sua ideia moldada de forma que possa entender o conceito do conteúdo exposto. Com um software de simulação, o educando, enquanto agente que participa, virtualmente, da simulação, abre-se para a construção, modificação e discussão do pensamento (ELIAS, 2009).

O uso de recursos multimídia e simulações como ferramenta didática, em especial no ensino de Engenharia, já há algum tempo vem sendo empregado com certo êxito no Brasil (ASSIS et al., 2003). Existem também programas para o cálculo de vigas e estruturas com um enfoque mais didático (MARTHA, 2013). Apesar de serem excelentes iniciativas, esses programas ainda são do tipo “caixa preta” onde o usuário apenas preenche dados em tabelas, mas não participa ativamente da construção do modelo físico que descreve o fenômeno em estudo. Esses softwares deixam de lado, assim, o enfoque educacional. Um resgate desta perspectiva pode ser conseguido com a abordagem da modelagem computacional.

A modelagem computacional possui um grande potencial de gerar uma nova forma de aprendizado, introduzindo uma nova dimensão ao ensino das ciências exatas. Esta ferramenta pedagógica incorpora em um só momento diversas formas de representação do sistema em estudo, tais como gráficos, tabelas, animações, etc. Desse modo, a modelagem contribui para o desenvolvimento cognitivo em geral, facilita a construção de relações e significados, potencializando as possibilidades pedagógicas da interação professor-aluno.

Dentre as ferramentas que possuem potencial para o apoio às atividades de modelagem matemática pode-se citar o Modellus. Esse software é dirigido ao ensino de Matemática, Física e Química e foi desenvolvido por pesquisadores da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. O objetivo da ferramenta é que a realização das experiências se tornem mais fáceis, para que, uma vez que o enfoque da programação e dos cálculos é mudado para a prática em si, a observação do que acontece no modelo e a interpretação dos resultados seja maior. O aplicativo dispensa o uso de qualquer linguagem ou metáfora

<sup>1</sup> Acadêmico do Curso de Engenharia Civil da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE. CCET, Campus Cascavel/PR. Bolsista IC/Fundação Araucária/Unioeste. maurovalcanaia@gmail.com

<sup>2</sup> Docente do Curso de Engenharia Civil da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE. CCET, Campus Cascavel/PR. eboldo@gmail.com



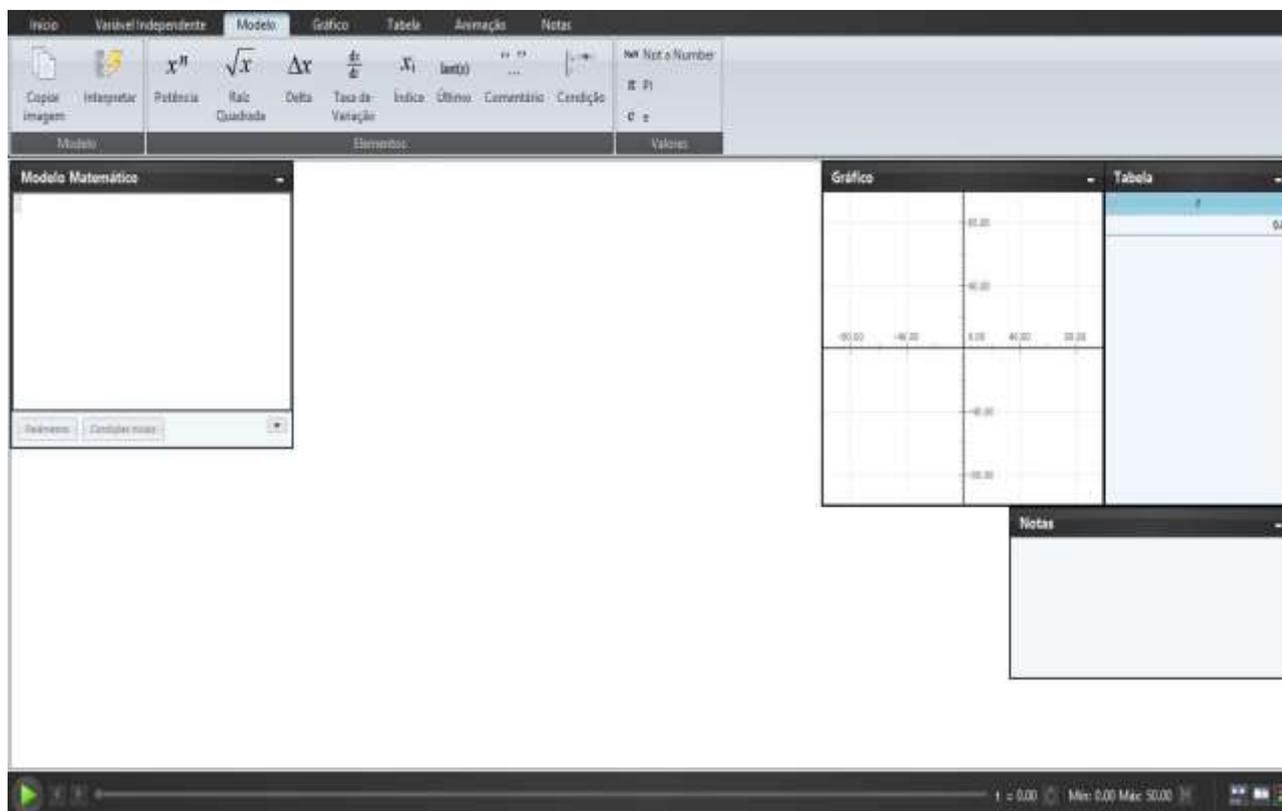
computacional e, adicionalmente, o simbolismo matemático utilizado é idêntico ao de um manuscrito, inclusive quando se formula um problema com equações diferenciais. Além disso, no programa é possível facilmente alterar os valores das múltiplas variáveis de um problema e, a partir de um modelo matemático de equações, gerar a respectiva representação gráfica do modelo em estudo (ESTRELA, 2013).

O objetivo desse trabalho foi analisar o potencial do Modellus como ferramenta para a modelagem computacional teórica dos modos longitudinais de vibração de uma viga engastada em um lado e livre em outro. Estruturas tipo vigas são, usualmente, barras longas prismáticas e retas, projetadas para suportar cargas aplicadas em vários pontos ao longo de seu comprimento. Elas podem ainda ser classificadas em referência ao modo pelo qual estão vinculadas, existindo tipos como: simplesmente apoiada, em balanço ou bi-engastada (BEER; JOHNSTON, 1994). O estudo é importante para o entendimento de como as frequências longitudinais de oscilação das vigas podem ser afetadas pela aplicação de carregamentos dinâmicos. Sendo um problema abordado nas disciplinas de Estruturas dos cursos de Engenharia Civil, esperamos que a utilização da simulação computacional seja útil para proporcionar uma abordagem mais interativa do modelo que descreve o comportamento dinâmico de vigas contínuas, facilitando a absorção do conhecimento científico pelos estudantes.

## 2 MATERIAL E MÉTODOS

### 2.1 MODELLUS

Desenvolvido deste 2002 por um grupo de pesquisadores na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa o Modellus ele é distribuído gratuitamente para fins educacionais. Uma das vantagens do uso do software é a que o usuário não precisa ter conhecimentos consideráveis sobre programação e cálculo diferencial, uma vez que a escrita de equações no programa é intuitiva e os cálculos diferenciais são realizados pelo próprio programa. O programa permite, de forma rápida e fácil, construir gráficos e tabelas que descrevem o comportamento do modelo, possibilitando a avaliação da qualidade do mesmo pela descrição dos dados experimentais resultantes do fenômeno em estudo. Além das características apresentadas, o programa permite a criação de "janelas de animação" (Figura 1) cuja importância está relacionada não só com questões de ordem lúdica, como também para a melhor compreensão teórica do assunto abordado, ao passo que permite efetuar simulações.



**Figura 1** – Área de trabalho do Modellus, explicitando as janelas onde serão apresentados os gráficos e tabelas, e mostrando também, a janela onde se escreve o modelo matemático. Na parte superior, estão as opções para a escrita das equações. A parte em branco da janela é onde as animações são construídas e executadas.



Fonte: Autor

## 2.2 MODELO DA VIGA ENGASTADA

O estudo da dinâmica de estruturas é geralmente abordado com base em modelos discretos. Apesar de apresentar uma grande vantagem por permitir realizar uma análise utilizando somente um número limitado de variáveis, eles conduzem sempre a soluções aproximadas, por mais refinado que o modelo seja visto que, desta maneira, estamos representando uma estrutura contínua por meio de coordenadas discretas.

Uma alternativa na análise de estruturas tipo viga é a utilização de modelos contínuos com infinitos graus de liberdade. Para isso é necessário estabelecer as equações de equilíbrio para um elemento infinitesimal da estrutura. Desta forma são encontradas as equações diferenciais de equilíbrio com as quais podemos obter as frequências naturais de oscilação e as configurações modais dos infinitos modos de vibração da estrutura.

Portanto, para a análise dos modos longitudinais de vibração de uma viga engastada em uma extremidade e presa em outra, densidade de massa  $\rho$  e módulo de elasticidade  $E$ . Analisou-se uma porção infinitesimal da mesma, com área  $A(x)$  e massa  $m$  através de um modelo contínuo. A figura 2 apresenta o deslocamento da seção hachurada infinitesimal de comprimento  $dz$  ao longo do comprimento da viga ( $u$ ), o esforço axial ( $N$ ).

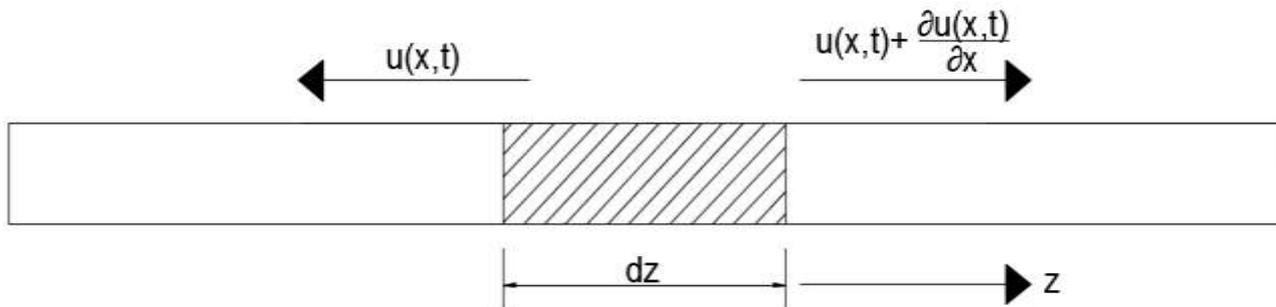


Figura 2 – Equilíbrio de um elemento infinitesimal da barra

Fonte: Autor

## 3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Na vibração longitudinal todas as partículas da viga estão se movendo paralelamente ao seu eixo de simetria. Para se calcular o equilíbrio da estrutura é analisado um elemento com comprimento infinitesimal  $dz$ , delimitado pelas seções  $A$  e  $B$ . Nomeando, então, os deslocamentos de  $A$  e  $B$ , respectivamente, como  $u(x, t)$  e  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$ , poderemos encontrar os esforços que atuam nas seções  $A$  e  $B$  (levando em consideração o alongamento unitário  $\epsilon = \frac{\partial u}{\partial z}$ ).

Assim, a equação de equilíbrio pode ser representada por:

$$EA \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = \frac{m}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz$$

onde:  $L$  é o comprimento da viga,  $E$  é o módulo de elasticidade da viga e  $A$  é amplitude.

A força de inércia do elemento será dada por:

$$P_i = \frac{m}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz$$

A partir disso, poderemos usar a segunda lei de Newton para encontrarmos a condição de equilíbrio dinâmico do elemento da viga, da seguinte forma:

$$N_b - N_a = P_i$$

Ou seja:

$$EA \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = \frac{m}{L} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz$$



Cancelando  $dz$  e substituindo  $\frac{m}{LA}$  pela densidade do material ( $\rho$ )

$$E \frac{\partial^2 u}{dz^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Designando  $\frac{E}{\rho}$  como  $a^2$ , temos finalmente:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{dz^2}$$

Uma forma simples de resolução desta equação de equilíbrio e que permite determinar as frequências e os modos de vibração, passa pela separação da variável  $u(x,t)$  em duas componentes, representando uma delas a configuração deformada e a outra a variação no tempo que se admite harmônica. Fazendo:

$$u(z, t) = Z(z)Y(t)$$

onde:  $Y(t) = \text{sen}(\omega t)$

Portanto, as derivadas da função  $Y(t)$  ficam:

$$\dot{Y}(t) = \omega \cos(\omega t)$$

$$\ddot{Y}(t) = -\omega^2 \text{sen}(\omega t) = -\omega^2 Y(t)$$

E as derivadas da função  $u(x,t)$ :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = Z(z)\ddot{Y}(t) = -Z(z)\omega^2 Y(t)$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{dz^2} = \frac{\partial^2 Z}{dz^2} Y(t)$$

Substituindo as equações das derivadas da função  $u(z,t)$  na equação de equilíbrio temos:

$$-Z(z)\omega^2 Y(t) = a^2 Y(t) \frac{\partial^2 Z}{dz^2}$$

Eliminando-se a variável  $Y(t)$ , obtém-se uma nova equação que só depende da variável que representa a configuração deformada da estrutura:

$$\frac{\partial^2 Z}{dz^2} + \frac{\omega^2}{a^2} Z(z) = 0$$

Para se resolver esta equação, é necessário que leve em conta as condições de contorno. No caso deste trabalho, a viga está engastada de um lado e livre na outra extremidade. As soluções particulares dessa equação são, respectivamente:

$$Z(z) = \cos \frac{\omega_n}{a} z \quad \text{e} \quad Z(z) = \text{sen} \frac{\omega_n}{a} z$$

O resultado encontrado para a frequência fundamental de vibração longitudinal é, portanto:

$$\omega_n = \frac{a\pi}{L} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$



Assim como no caso das oscilações transversais, a frequência encontrada para as oscilações longitudinais acima depende só dos parâmetros estruturais a viga. Isso é esperado no caso de vibrações livres, isento de excitações externas, que são provocadas por deslocamentos iniciais dos pontos do sistema em relação a posição de equilíbrio, e que continuam até que as forças internas da estrutura reestabeleçam o estado de equilíbrio.

O período das oscilações será:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2L\sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

Para a implementação do modelo matemático no software Modellus, foram inseridas as soluções do tipo oscilatório  $\sin \frac{\omega_n}{a} z$ , na janela do modelo matemático. A propagação da vibração longitudinal na viga pode ser visualizada por meio de 24 esferas que representam, cada uma, uma porção infinitesimal da mesma. Para que uma esfera “percebesse” a presença da outra em função de sua movimentação, as posições de cada partícula foram conectadas por meio da correlação entre as variáveis tempo e posição, como mostra a figura 3.

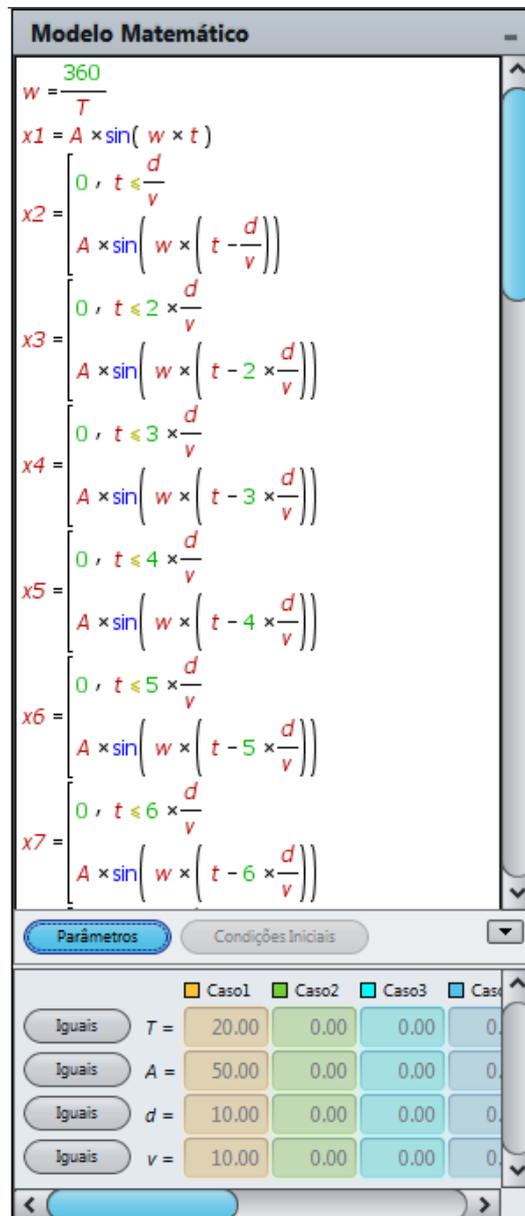


Figura 3 – Janela do modelo matemático, mostrando as equações implementadas para as coordenadas de cada partícula ( $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{24}$ ).



Fonte: Autor

Na figura 3 também podemos ver a janela de parâmetros da simulação. Nesta, há a possibilidade de facilmente alterar as condições iniciais de contorno e os valores dos parâmetros e variáveis presentes no modelo. Até dez casos podem ser estudados simultaneamente com variação individual desses valores. Assim outras configurações dependentes das condições de contorno como, por exemplo, oscilações não harmônicas ou o caso de outros tipos de engastações da viga, podem ser facilmente analisadas possibilitando ao aluno uma maneira intuitiva de desenvolvimento cognitivo e de aprendizado construtivo.

Na figura 4 está representada a área de trabalho do Modellus já com as equações implementadas e a simulação ativa.

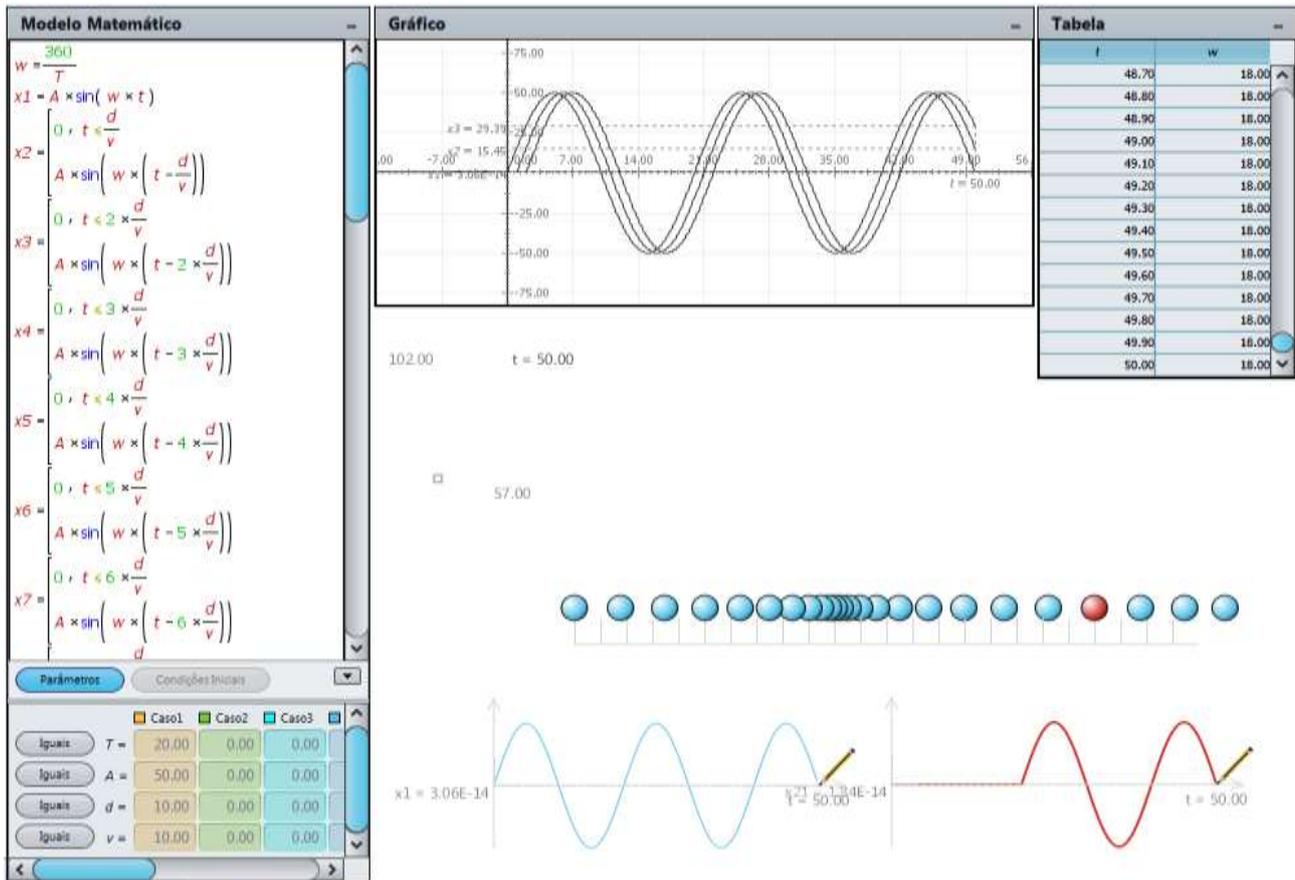


Figura 4 – Simulação de vibrações longitudinais em uma viga.

Fonte: Autor

A janela “Gráfico” da figura 4 mostra a posição de cada partícula (só três estão representadas) em função do tempo. Podemos perceber claramente a condição periódica do movimento. A amplitude de movimento de todos os elementos da viga é igual, no entanto alcançam máximos e mínimos com uma pequena defasagem devido a posição progressiva de cada elemento na viga em função da coordenada z. Através dessa visualização, pode-se calcular as frequências dos modos normais de vibração diretamente dos valores de período lidos do gráfico da posição versus tempo.

A defasagem entre os máximos de oscilação devido a posição progressiva de cada elemento na viga pode ser mais visível se analisarmos os dois gráficos de oscilação localizados na parte inferior direita da figura 4. Eles representam respectivamente as partículas 1 (em azul) e a partícula 21 (em vermelho). A partícula inicial começa a oscilar no instante  $t = 0$ , já a partícula que está quase na outra extremidade da viga, só vai começar seu movimento quando a oscilação se propagar por todos os elementos intermediários. A implementação desses dois gráficos é simples, somente é preciso inserir uma ferramenta “caneta” e associar a coordenada x de cada partícula à ela. Esse tipo de visualização permite ao aluno desenvolver melhor sua cognição sobre o problema abordado.



## 4 CONCLUSÃO

Utilizando um modelo teórico simplificado com um grau de liberdade neste trabalho foi obtida a equação que descreve a frequência natural longitudinal de uma viga, a partir de um modelo contínuo. A frequência obtida depende somente dos parâmetros estruturais da viga.

Para o desenvolvimento das simulações usou-se o software Modellus. Este, mostrou-se adequado para a modelagem do sistema estudado. Sua utilização é fácil e o programa é voltado aos resultados e ilustrações gráficas da simulação. As possibilidades de visualização apresentadas reforçam que o software Modellus permite a interação com facilidade para realizar de uma maneira intuitiva os experimentos conceituais com o modelo matemático proposto. Somando-se o fato que o programa ainda permite que valores de parâmetros e variáveis sejam facilmente alterados para o estudo e comparação de diferentes casos de condições de contorno iniciais, fica evidente que esse tipo de ferramenta pode auxiliar na construção de conhecimento contribuindo positivamente na relação ensino/aprendizagem.

O presente trabalho teve como propósito o incentivo do uso do programa como metodologia auxiliar de ensino na sala de aula, principalmente para os professores dos cursos de Engenharia que podem utilizá-lo em conjunto com as técnicas tradicionais de ensino, uma vez que, além de ser de fácil uso, não necessitando de profundos conhecimentos em programação ou matemática, é distribuído gratuitamente.

## AGRADECIMENTOS

Gostaríamos de agradecer à Pró Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da UNIOESTE e à Fundação Araucária pelo apoio financeiro para realização dessa pesquisa.

## REFERÊNCIAS

ARAUJO, I. S.; VEIT, E. A.; MOREIRA, M. A. Uma revisão da literatura sobre estudos relativos a tecnologias computacionais no ensino de física. **Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências**, v.4, n.3, p. 5-18, 2004.

ASSIS, W. S.; BITTENCOURT, T. N. e NORONHA, M. Desenvolvimento de recursos multimídia para o ensino de estruturas de concreto. **Revista IBRACON de Estruturas**, São Paulo, v. 32, p. 41-51, 2003.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. **Mecânica vetorial para engenheiros**. 5º ed. São Paulo: Makron Books, 1994. 793p.

ELIAS, D. C. N. Tendências das Propostas de Utilização das Ferramentas Computacionais no Ensino de Física no Nível Médio e Superior. **Anais: XII Encontro Nacional de Ensino de Ciências**, Florianópolis, 2009.

ESTRELA, Jonathan Alexandre. **Análise Comparativa de Ferramentas Computacionais no Ensino da Teoria das Estruturas na Engenharia Civil**. 2013. 50 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2013.

GRANDINETTI, F. J.; FILHO, E. A. Comparação dos modos de vibrações teórico e experimental em vigas com trincas. **Rev. Ciências. Exatas**, Taubaté, v. 9/10, n. 1-2, p. 61-67, 2004.

MANZINI, N. I. J. Webapoio de física – uma possibilidade de apoio à aprendizagem. **Anais: XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia**. Belém - PA, 2012.

MARTHA, L. F. **FTOOL - um programa gráfico-interativo para ensino de comportamento de estruturas. Manual do usuário**. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002. 33 f. Disponível em: <<http://www.tecgraf.puc-rio.br/ftool/>>. Acesso em: março de 2015.

MEDEIROS, A., MEDEIROS, C. F. Possibilidades e Limitações das Simulações Computacionais no Ensino da Física. **Rev. Bras. Ensino de Física**, 24, n. 2, p. 77-86 (2002).

NETO, G. F.; ESTEVES, B. L.; PEREIRA, R. R.; JÚNIOR, L. O. A. Utilização do kit lego mindstorm nxt no ensino de controle de processos. **Anais: XL Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia**. Belém - PA, 2012.