ISBN 978-85-459-0309-3

A HIPÓTESE DE RIEMANN

Willian Cleyson Fritsche[1], *Alexandre Shuji Suguimoto*[2]

[1] Acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática, UNICESUMAR-EAD-Maringá-Pr. Bolsista PROBIC-UniCesumar
[2] Docente do curso de Licenciatura em Matemática, UNICESUMAR

RESUMO

O presente trabalho é constituído de pesquisa bibliográfica e possui o objetivo de desenvolver e disseminar o conhecimento da hipótese de Riemann, para tal, apresenta-se o conceito básico e essencial para subsidiar e incentivar estudos mais abrangentes sobre um dos maiores problemas da matemática.

PALAVRAS-CHAVE: Bernhard Riemann; Distribuição dos Números Primos; Função Zeta de Riemann.

1 INTRODUÇÃO

Quando Bernhard Riemann foi convidado em 1859 a se tornar membro correspondente da Academia de Berlin, como era de costume em tais ocasiões, entregou um artigo com as pesquisas que estava desenvolvendo. O célebre artigo de Riemann em 1859 era intitulado “Sobre a quantidade de números primos menores que um dado valor”, no qual, Riemann mostrou que os zeros não triviais da função $\zeta(s)$ estão intrinsicamente conectados com os números primos, o que é um dos resultados mais belos da matemática.

No mesmo artigo, Riemann formulou a conjectura que ficou conhecida como a hipótese de Riemann e que se revelou um problema difícil de ser solucionado, extremamente importante e que está relacionado com diversos resultados matemáticos, inclusive, a melhor estimativa do erro no Teorema dos Números Primos.

A hipótese de Riemann é o único problema pertencente simultaneamente à lista dos problemas de Hilbert (maiores desafios matemáticos do século XX), à lista dos problemas do milênio (7 maiores desafios matemáticos para este milênio) e à lista dos problemas de Smale (maiores desafios matemáticos para o século XXI), o que contextualiza a sua eminente importância. De fato, a hipótese de Riemann é uma conjectura célebre dentro da matemática.

2 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Leonhard Euler em 1737 obteve uma fantástica relação entre a função zeta $\zeta(\sigma)$ e os números primos que ocorre pelo produto euleriano, uma expressão analítica da fatoração única de inteiros como produto de números primos p, assim, define-se a função $\zeta(\sigma)$ como:

ISBN 978-85-459-0309-3

$$\zeta(\sigma) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^{\sigma}}\right)^{-1}, \quad para\, \sigma > 1$$

através de $\zeta(\sigma)$ Euler desenvolveu uma demonstração da infinidade dos números primos que é indireta e por absurdo.

Riemann percebeu que poderia definir $\zeta(\sigma)$ no semiplano complexo com parte real superior a 1 e realizar a continuação analítica desta definição da função zeta para todo o plano complexo exceto o ponto 1, onde existe um pólo simples de resíduo 1, assim, obtendo a denominada função zeta de Riemann $\zeta(s)$ com $s \in \mathbb{C}\backslash\{1\}$, definida como uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ obtida da continuação analítica da função zeta $\zeta(\sigma)$ para todo o plano complexo tal que $s \neq 1$.

A função $\zeta(s)$ com domínio $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ possui várias propriedades importantes, no qual, as propriedades fundamentais sobre os seus zeros são:

1. $\zeta(s) \neq 0$ para $\mathcal{Re}(s) > 1$, garantido pelo produto euleriano;
2. $\zeta(-2n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}^{*}$, ou seja, todos os inteiros pares negativos anulam a função $\zeta(s)$ e são denominados zeros triviais, pois são zeros reais;
3. Se $s = \omega \neq -2n$, então, $\zeta(s) = 0$ se, e somente se, $\mathcal{Im}(s) \neq 0$ e $0 < \mathcal{Re}(s) < 1$, denominados zeros não triviais ω, pois são zeros não reais;
4. Existem infinitos zeros não triviais ω e todos se localizam na região $0 < \mathcal{Re}(s) < 1$, denominada faixa crítica;
5. Os zeros não triviais ω estão dispostos simetricamente em relação ao eixo real, ou seja, se ω é um zero não trivial o seu conjugado $\overline{\omega}$ também será, como também, a parte real dos zeros não triviais são simétricas em relação à reta $\mathcal{Re}(s) = \frac{1}{2}$, denominada reta crítica, ou seja, dado $\alpha \in \left]0.\frac{1}{2}\right[$, se $\omega = \left(\frac{1}{2} + \alpha\right) + it$ é um zero não trivial, $\omega = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) + it$ também será.

Os zeros triviais de $\zeta(s)$ são todos conhecidos, portanto, o foco passa a ser os zeros não triviais ω de $\zeta(s)$, para entender a disposição dos zeros não triviais ω ao longo da faixa crítica considere o gráfico tridimensional de $|\zeta(s)|$ na figura 1, que parece uma cadeia de montanhas com a superfície estendendo-se até o nível do 0:

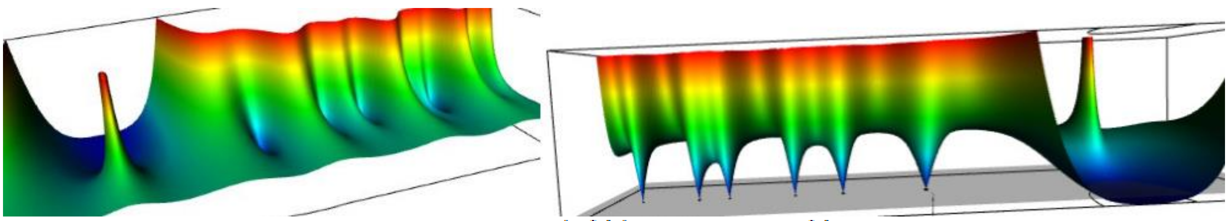

Figura 1 – Gráfico tridimensional de $|\zeta(s)|$ com $-4 \leq \mathcal{Re}(s) \leq 4$ e $-10 \leq \mathcal{Im}(s) \leq 40$
Fonte: NIST Digital Library of Mathematical Functions

No gráfico tridimensional da esquerda, o “pico solitário” é formado pelo pólo simples $s = 1$ e estendesse para o infinito, pode-se localizar os zeros não triviais ω que são os pontos mais profundos dos “buracos” na encosta da cadeia de montanhas, por

ISBN 978-85-459-0309-3

outra perspectiva, no gráfico tridimensional da direita, também pode-se visualizar o pólo simples $s = 1$, mas o que nos interessa são as formas que lembram "estalactites" e interceptam o plano cinza em um único ponto que são os zero não trivial ω.

Perceba que os primeiros zeros não triviais de $\zeta(s)$ estão alinhados, considerando um plano que intercepta verticalmente o gráfico tridimensional de $|\zeta(s)|$ e contém o conjunto dos primeiros 13 zeros não triviais ω, obtemos a figura 2:

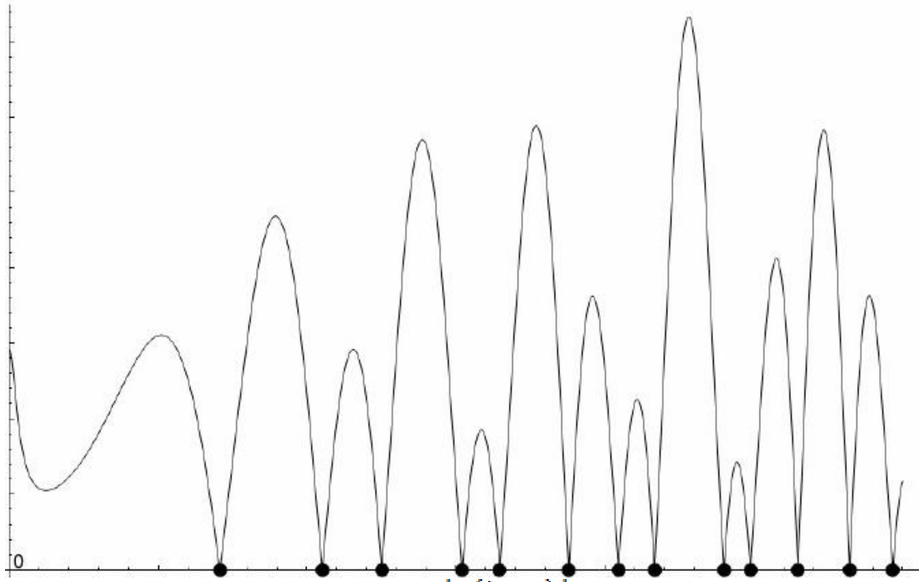

Figura 2 – Gráfico de $\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|$ para $0 \leq t \leq 60$

Fonte: BAUGH, 2007, p. 5

A intersecção do plano é exatamente na reta crítica $\mathcal{Re}(s) = \frac{1}{2}$, logo, todos os primeiros 13 zeros não triviais de $\zeta(s)$ (pontos do gráfico da figura 2) são da forma $\omega = \frac{1}{2} + it$, Riemann não acreditava que este fato era coincidência, portanto, conjecturou em seu artigo de 1859:

Hipótese de Riemann. Todos os zeros não triviais da função $\zeta(s)$ pertencem à reta crítica $\mathcal{Re}(s) = \frac{1}{2}$.

Riemann também conjecturou e von Mangoldt demonstrou em 1905 que o número $N(T)$ de zeros não triviais de $\zeta(s)$ na faixa crítica $0 < \mathcal{Re}(s) < 1$ com $0 < \mathcal{Im}(s) \leq T$ é dado por:

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\left(\ln \frac{T}{2\pi} - 1\right) + O(\ln T)$$

denominada fórmula de Riemann – von Mangoldt, no qual, $O(\ln T)$ (notação O-grande) exprime que $\left|N(T) - \frac{T}{2\pi}\left(\ln \frac{T}{2\pi} - 1\right)\right| \leq d \ln T$ com o múltiplo constante $d < 0.14$.

Para os zeros não triviais de $\zeta(s)$ na reta crítica $\mathcal{Re}(s) = \frac{1}{2}$ a fórmula de Riemann – von Mangoldt denota-se $N_0(T)$, precisamente, como $N(T)$ conta todos os zeros não

ISBN 978-85-459-0309-3

triviais ω da faixa crítica, inclusive, os da reta crítica, enquanto $N_0\,(T)$ conta somente os zeros não triviais ω da reta crítica, obviamente temos que $N_0\,(T) \leq N(T)$ para qualquer intervalo $(0,T]$ da faixa crítica com $T \to \infty$, portanto, a hipótese de Riemann afirma que $N_0(T) = N(T)$ para qualquer que seja o intervalo $(0,T]$ com $T \to \infty$. Essencialmente, a comparação entre os valores de $N_0\,(T)$ e $N(T)$ são utilizados para verificar a hipótese de Riemann em intervalos $[T_1, T_2]$ com $T_1 < T_2$.

Riemann também descobriu uma intrínseca conexão entre os zeros não triviais ω e os números primos, a qual revela que o conhecimento da disposição dos zeros não triviais da função $\zeta(s)$ influência no melhor conhecimento da distribuição dos números primos, tal fato, revolucionou o estudo da distribuição dos primos e permitiu que Jacques Hadamard e Charles de la Vallée Poussin demonstrassem (independentes) a conjectura dos Números Primos em 1896, conhecido como Teorema dos Números Primos.

Inclusive, o fato de não existir zeros não triviais ω na reta $\mathcal{R}e(s) = 1$ é equivalente ao Teorema dos Números Primos, além disso, o conhecimento de regiões da faixa crítica livre de zeros não triviais ω (como também o conhecimento de grandes quantidades de zeros não triviais $\omega = \frac{1}{2} + it$) conduz a melhores estimativas e resultados de funções ligadas à distribuição dos números primos, como por exemplo, o O-grande para o erro no Teorema dos Números Primos.

Essencialmente, Helge von Koch mostrou em 1901 que a hipótese de Riemann é equivalente a seguinte estimativa do erro da aproximação de Gauss no Teorema dos Números Primos:

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(\sqrt{x}\,\ln x\right)$$

tal que O-grande $\left(O\left(\sqrt{x}\,\ln x\right)\right)$ exprime que $\pi(x)$ e $Li(x)$ têm uma diferença absoluta limitada quando $x \to \infty$ por um múltiplo constante positivo c de $\sqrt{x}\,\ln x$, ou seja:

$$|\pi(x) - Li(x)| \leq c\,\sqrt{x}\,\ln x$$

Lowell Schoenfeld mostrou em 1976 que a constante c que multiplica $\sqrt{x}\,\ln x$ no resultado de von Koch é igual a $\frac{1}{8\pi}$ para todo $x \geq 2657$, assim, refinando a equivalência de von Koch da Hipótese de Riemann para

$$|\pi(x) - Li(x)| \leq \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\,\ln x\,, \qquad x \geq 2657$$

que de fato, mostra como a aproximação de $Li(x)$ para $\pi(x)$ é extremamente boa conforme $x \to \infty$, se a Hipótese de Riemann for verdadeira.

Godfrey Hardy demonstrou em 1914 que existem infinitos zeros não triviais ω pertencentes à reta crítica $\mathcal{R}e(s) = \frac{1}{2}$, mas apesar de ser um grande resultado não significa que todos os zeros não triviais ω pertencem à reta crítica, podem existir infinitos zeros não triviais de $\zeta(s)$ em outros pontos da faixa crítica, inclusive, apenas um zero não trivial ω não pertencente à reta crítica (que pela simetria existente resultaria em outros 3

ISBN 978-85-459-0309-3
zeros não triviais) seria suficiente para mostrar que a hipótese de Riemann é falsa (seria um contraexemplo), no entanto, atualmente foram verificados trilhões de zeros não triviais de $\zeta(s)$ e todos pertencem à reta crítica.

Bohr e Landau também demonstraram em 1914 que todos, exceto uma proporção infinitesimal de zeros não triviais ω estão muito próximos da reta crítica, além disso, Brian Conrey demonstrou em 1989 que no mínimo 40% dos zeros não triviais ω pertencem à reta crítica, ou seja, não importa a quantidade de zeros não triviais de $\zeta(s)$ que se considerar, no mínimo 40% desta quantidade de zeros ω sempre estará na reta crítica $\mathcal{R}e(s) = \frac{1}{2}$.

3 CONCLUSÃO

O campo de estudo da distribuição dos números primos, da função zeta e da hipótese de Riemann é muito mais abrangente que os breves comentários do presente artigo. A hipótese de Riemann possui numerosas formas equivalentes e implicações em áreas distantes da Teoria dos Números, como na mecânica quântica, além disso, a Teoria dos Números Primos possui numerosos “teoremas” que dependem da veracidade da hipótese de Riemann para completarem suas demonstrações.

Provavelmente, a matemática ainda não possui as propriedades necessárias para subsidiar uma demonstração da hipótese de Riemann, ou talvez, um dia seja encontrado um contraexemplo, mostrando que a hipótese é falsa, como também, é possível que a qualquer momento seja publicado uma demonstração correta da sua veracidade.
Contudo, atualmente a Hipótese de Riemann têm sido um dos assuntos mais estudados e especulados dentro da matemática, e assim continuará sendo, mesmo que exista um contraexemplo ou seja demonstrada.

REFERÊNCIAS

BAUGH, D. D. **The cycle problem: an intriguing periodicity to the zeros of the Riemann zeta function.** Dez. 2007. Disponível em: <http://arxiv.org/abs/0712.0934>. Acesso em: ago. 2015.

DERBYSHIRE, J. **Obsessão Prima.** 1.ed. Rio de Janeiro: Record, 2012. 447 p.

DEVLIN, K. **Os problemas do milênio.** 2°. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008. 320 p.

DINGMAN, R. **The Riemann Hypothesis.** Disponível em: <http://wstein.org/edu/2010/414/projects/dingman.pdf> Acesso em: out. 2015.

DU SAUTOY, M. **A música dos números primos: A história de um problema não resolvido na matemática.** Rio de Janeiro: Zahar, 2007. 351 p.

MAZUR, B.; STEIN, W. **Prime Numbers and the Riemann Hypothesis.** 1 ed. New York: Cambridge, 2016. 141 p.

RIBENBOIM, P. **Números Primos: Velhos Mistérios e Novos Recordes.** 1. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 328 p.

ISBN 978-85-459-0309-3

SPENTHOF, R. **Primos: da aleatoriedade ao padrão.** 2013. 44 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Departamento de Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/582>. Acesso em: Jul. 2015.

WOLF M. **Will a physicists prove the Riemann Hypothesis?.** Out. 2014. Disponível em: <http://xxx.lanl.gov/abs/1410.1214>. Acesso em: mar. 2016.